FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

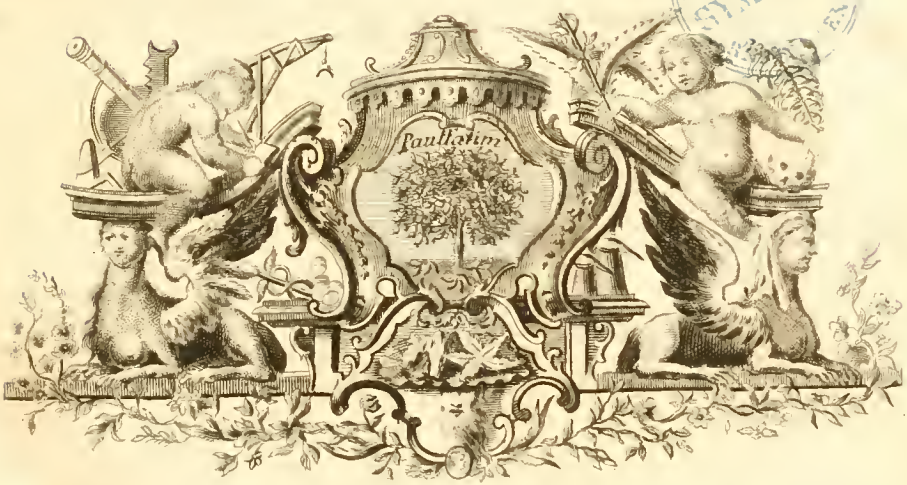
Bound
A.M.N

COMMENTARII
ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS
PETROPOLITANAE.

TOMVS VI.

AD ANNOS cIↃIↃccxxxii. & cIↃIↃccxxxiii.

BIBLIOTHEC[illegible]



PETROPOLI,
TYPIS ACADEMIAE. cIↃIↃccxxx[illegible].

INDEX
COMMENTARIORVM.

IN CLASSE MATHEMATICA.

Georg. Wolffg. Krafft Obſeruatio Solſtitii Aeſtiui, facta Petropoli Anno 1730. p. 3.

Eiusdem de Vngulis Cylindrorum varii generis. p. 13.

Leonh. Euleri Solutio ſingularis Caſus circa Tautochroniſmum. p. 28.

Iacobi Hermanni de ſuperficiebus ad Aequationes locales revocatis, variisque earum Affectionibus. p. 36.

Leonh. Euleri Methodus generalis ſummandi progreſſiones. p. 68.

C. G. Criteria quaedam Aequationum, quarum nulla radix rationalis eſt p. 98.

Leonh. Euleri Obſervationes de theoremate quodam Fermatiano, aliisque ad numeros primos ſpectantibus. p. 103.

Dan. Bernoulli Theoremata de oſcillationibus corporum filo flexili connexorum et catenae verticaliter ſuſpenſae p. 108.

Leonh. Euleri problematis Iſoperimetrici in latiſſimo ſenſu accepti ſolutio generalis. p. 123.

Georg. Wolffg. Krafft de Lunulis quadrabilibus, e variarum curuarum combinatione ortis. p. 156.

Leonh.

Leonh. Euleri Specimen de Conſtructione Aequationum differentialium, ſine indeterminatarum ſeparatione. p. 168.

Eiusdem de ſolutione Problematum Diophantaeorum per numeros integros p. 175.

Iac. Hermanni de quadratura curuarum Algebraicarum, quarum aequationes locales coordinatas ſibi inuicem permixtas inuoluunt. p. 189.

Eiusdem Supplementum ad ſchedam in menſe Auguſto Actorum Eruditorum 1719. circa problema a Tayloro Mathematicis non Anglis propoſitum, editam. p. 200.

Leonh. Euleri de formis Radicum aequationum cuiusque ordinis coniectatio, p. 216.

Eiusdem Conſtructio Aequationis differentialis $ax^n dx = dy + y^2 dx$. p. 231.

IN CLASSE PHYSICA.

J. G. D. de Mutilatione Brachiorum in Puero, cuius Tom. III. Comment. facta eſt commemoratio, Diſſertatio Anatomico-Phyſiologica. p. 249.

Joſ. Weitbrecht de Cordibus villoſis. p. 268.

Eiusdem de Circulatione Sanguinis Cogitationes Phyſiologicae. p. 276.

J. G. D. Aortae et Spinae Dorſalis mira Corruptio. praemittuntur Animaduerſiones generales ſuper ſpinae dorſalis ſtructuram. p. 302.

IN

IN CLASSE HISTORICA ET CRITICA.

Theop. Siegf. Bayeri De Litteratura Mangjurica. p. 325.

Eiusdem de Lexico Sinico Çù gvéy. p. 339.

Eiusdem de Russorum prima Expeditione Constantinopolitana. p. 365.

IN OBSERVATIONIBVS ASTRON.

Iosf. Nic. De L'Isle Eclipses Satellitum Iouis, obseruatae in Imperiali specula Astronomica, quae Petropoli est, per integrum annum 1738. p. 395.

CLASSIS PRIMA.

CONTINENS

MATHEMATICA.

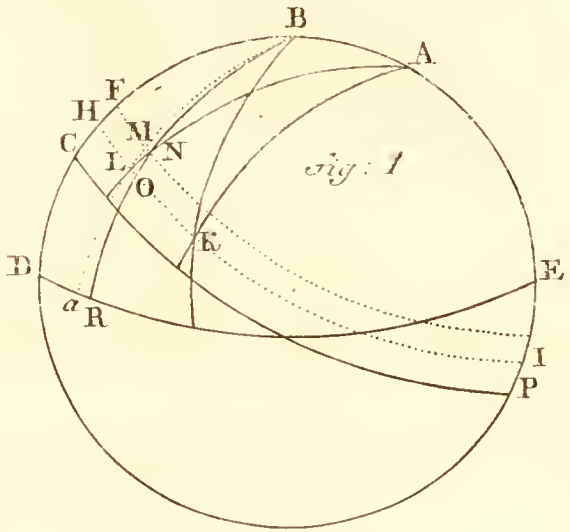


fig. 1

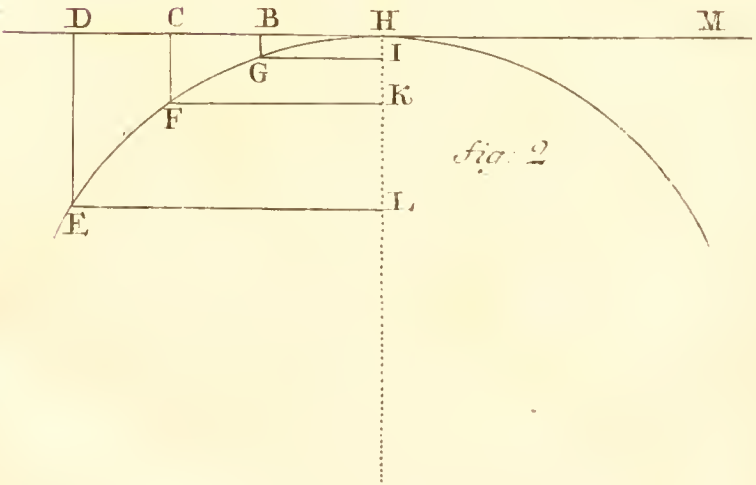


fig. 2

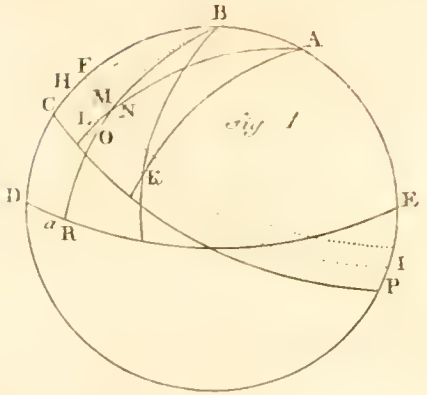


fig 1

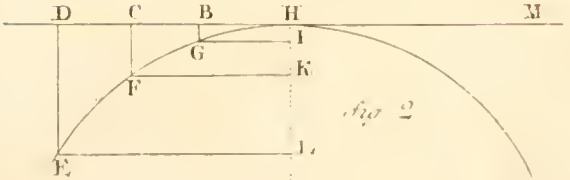


fig 2

OBSERVATIO SOLSTITII AESTIVI,

FACTA ANNO MDCCXXX. PETROPOLI,

à

Georgio Wolffg. Krafft.

§. 1.

AEstas feruida, quam hoc anno transegimus, Tab. I.
cum Astronomis quam Agricolis magis propitia esset, ac praecipue circa Solstitii dies Solem per aliquot septimanas fere semper purum et ab omni nube liberum ostenderet: facile coeli cultoribus persuasit, vt serenitatem hanc aëris in Astronomiae commoda traherent, et maxime momento exacto Solstitii aestiui insidiarentur. Factum id scio summa cum cura et diligentia in Obseruatorio Imperiali. Volui tamen et ego eo, quo licuit vti, minori instrumentorum apparatu, eundem hunc scopum mihi proponere. Qua vero ratione, et qua via, rem meam exegerim: praesenti scripto hoc explicare constitui.

§. 2. Instrumenta quibus antiquiores maximam Solis declinationem obseruare laborarunt, copiose describit Proclus in lib. I. Hypotyp. Astron. Posit. Gnomones praecipue in hanc rem adhibiti fuerunt; qualem Lacedaemone erexit Anaximander, referente Strabone, lib. I. et Diog. Laërt. lib. II. Maximam celebritatem inter hos acquisiuit à Pythea erectus Massiliae, cuius obseruationem idem Strabo recensèt, nec non Gassendus in vita Peirescii. Consenserunt in eandem methodum recentiores, maxime Cassinus, qui praeclaro suo Gnomone Bononiae statuto inuenit, altitudines Solstitiales, saepe dimidio fere minuto primo diuersas fuisse: cuius rei varias caussas adducit in Memoires de la Mathem. et Physique. 1693.

§. 3. Tutiores autem longe eas esse Obseruationes, quae circa aestiuum Solstitium fiunt, merito iudicat Dau. Gregorius, in locis nempe, quae ab Aequatore versus Polum Boreum sita sunt; quia ob maiores Solis altitudines non adeo turbant subtile negotium refractiones. Quamuis autem hoc sequaris monitum, non tamen insignes difficultates euitabis, nisi Instrumenta ad manus sint, de quorum magnitudine ac fide nihil desideres. Heuelius cap. IV. Prodr. Astron. propria experientia edoctus statuit, Solstitia, licet optimis et maximis Instrumentis, etiam ab omnium exercitatissimo Obseruatore deprehendantur, nequaquam tamen posse in ipsis minutissimis determinari.

§. 4. Variis hisce impedimentis non deterritus, sequente consilio rem aggressus sum. Adhibui Quadran-

drantem ferreum, cuius limbus orichalco obductus singula minuta prima lineis transuersalibus exhibet, radius vero est duorum pedum Parisinorum cum $2\frac{1}{4}$ digitis. Quadrans hic in Anglia primum fabricatus, eandem plane correctionem passus est, quam ille quem describit Clariss. *De l'Isle* in Tomo II. horum Commentar. pag. 497. seqq. adeoque eius vlteriore descriptione non opus est. Quolibet porro die post acquisitam solis altitudinem meridianam ad notas quasdam correctorias eius errorem indagaui; interiecto autem tempore summa industria caui, ne tactu aliquo rudiori telescopium lateri affixum è situ suo dimoueretur, nihilque eorum omisi, quae subtilitas talis Instrumenti requirere potest.

§. 5. Quamuis itaque non haberem, cur fidem Instrumenti in dubium vocare possem: malui tamen, vt in re tam subtili etiam minutias sectarer, vlteriorem adhuc adiicere diligentiam. Primo quidem cogitaui, in Instrumento huius magnitudinis non facile committi errorem in diuisione illorum graduum, qui totum Quadrantis limbum in partem dimidiam, tertiam, quartam etc. secant, adeoque posse diuisiones graduum 45, 30, 15, etc. aut in genere quintum quemlibet gradum pro maxime tutis assumi; praeterea, ne quid suspicionis relinquerem, hos gradus ope circini alicuius maioris demum examinaui per chordas è dato radio computatas, quibus omnibus has diuisiones legitime factas inueni. Cum itaque memor essem methodi illius, quam in horum Commentariorum Tom. IV.

pag. 115. §. 6. propoſui, qua ex datis duabus altitudinibus quibuscunque, vna cum diſtantiis veris à meridie, altitudo aſtri meridiana elici poteſt: propoſui mihi hanc viam ſequendam; idque eo magis, quia mutationes Declinationis, quibus illa methodus in Sole ſubiecta eſt, circa Solſtitii dies admodum paruae ſunt in ſpatio 5 vel 6 horarum; quas tamen non omnino neglexi, vti in ſequentibus apparebit. Hinc Solem bis obſeruaui in altitudinibus quantum licuit talibus, de quarum fide certus eram; atque deinde ex temporibus ope horologii oſcillatorii exacte ad meridiem compoſiti acquiſitis, altitudinem ſolis meridianam calculo ſatis improbo et moleſto venatus ſum, eamque cum inuenta in ipſo meridie per Quadrantem comparaui, vt hoc modo de altitudine ſolis meridiana quouis die obtenta eo magis certus eſſe poſſim. Verum quoniam tempora etiam maxime in conſiderationem hic venire video: neceſſe eſt, vt exponam qua ratione meridiem obſeruauerim, atque ad illum horologium meum direxerim.

§. 6. Cum aſſuetus eſſem illi methodo, qua Clariſſimus *De l'Isle* meridiem obſeruare ſolet exactiſſime, ope meridianae alicuius capillaris, quam imago Solis in conclaue obſcuratum per foramen immiſſa percurrit: facile iudicaui, exactiorem viam vix inueniri poſſe. Sed denegabant mihi circumſtantiae eiusmodi conclaue, in quo feneſtris clauſis noctem efficere poſſem. Igitur cura mentem ſubiit, an fortaſſe in muſeo à Sole illuminato idem efficere liceat, ſalua rei exactitudine.

dine. Quapropter in hunc finem parieti lapideo fenestrae illius conclauis in quo obseruare datur, infixi horizontaliter cylindrum orichalcinum cauum, cuius apertura aequat 7 lineas pedis Paris. cui aperturae immisi cylindrum alium solidum, in priori cauitate horizontaliter volubilem, semper tamen firmum, qui in extremitate sua annulum affixum gerit, cui vitrum politum commode inseri potest. Ex pluribus vitris selegi tale, quod imaginem Solis exceptam in distantiam 5 vel 6 pedum proiiceret distinctam, et vtroque limbo exactissime terminatam; effeci autem vt cylindrus hic mobilis gyrari possit in immobili, vt varias altitudines Solis meridianas sequi semper possem, et imago inde procreata quouis anni tempore in charta perpendiculariter obiecta rotunda exacte appareret. Porro huic machinae opposui capillum tenuissimum verticaliter extensum in distantia trium pedum, superius atque inferius firmatum; quibus omnibus non sine voluptate obtinui, vt imaginis solaris appulsum ad vmbram huius capilli in dimidio quoque minuto secundo horologii propinqui notare potuerim, etiam in conclaui non obscurato, sed à sole illuminato. Quo facto per obseruationes altitudinum aequalium Solis ante et post meridiem multis diebus repetitas deprehendi, meridianam hanc verticalem ostendere meridiem $49\frac{1}{2}$ secundis iusto citius, atque adeo ab omni meridie per eam inuento subtrahi debere haec minuta, vt verus habeatur. His itaque subsidiis negotium meum peregi; et praeterea Refractionum Tabulam vsurpaui eam, quam Cel. Cassinus in Commentariis Acad. Scientiar. Paris. Anno

1714.

1714. publicauit, quaeque eadem eſt cum illa, quam exhibuit in Tractatu, cui titulus eſt: Les Elemens de l' Aſtronomie verifiés par etc. Vt vero quoque altitudini meridianae per calculum inuentae adiicere vel demere poſſim partem conuenientem, quam Declinatio interea temporis ſubiit: adiicio hic latereulum, ex quo illa apparet. Erat nempe altitudo vera centri Solis meridiana per Quadrantem inuenta

		°	′	″
Iunii 8	- - -	53	31	24
9	- - -	—	32	0
10	- - -	—	32	15
12	- - -	—	32	0
13	- - -	—	31	5

§. 7. Cum igitur methodus illa, qua ex duabus altitudinibus Solis, vna cum tempore vero, obſeruatis, altitudo Solis meridiana quaeritur, cautioni Declinationis ſubiecta ſit: non poſſum non indicare quoque, qua medela vſus fuerim ex hac parte. Repraeſentet in hunc finem DBAE Meridianum, CP Aequatorem, obſeruetur altitudo Solis in K; ſi iam in eodem parallelo IKOLH Sol pergeret conſtanter moueri: obſeruaretur tempore BAL in loco L; ſed auxit interea temporis ſuam declinationem, adeoque eodem tempore BAL obſeruatur in N, quaſi in alium parallelum remotus eſſet. Sed in triangulo LMN, quod ob paruitatem pro rectilineo haberi poteſt, latus LN, quod eſt augmentum declinationis à prima obſeruatione ad ſecundam, admodum paruum eſt; angulus MLN

Fig. 1.

in

in meridie euaneſcit plane, adeoque circa meridiem eſt admodum paruus, conſequenter eo magis LMN recto appropinquat; adeoque ML, NL latera ad ſenſum ſunt aequalia; porro ob angulum LBO valde paruum, latera MB, NB, fere etiam aequalia ſunt; hinc LB − NB = LB − MB = LM = LN; vnde LB = NB + LN, aut QL = 90° − LB = 90° − NB − LN = RN − LN; ex quo apparet, quod ab altitudine propius ante meridiem inuenta ſubtrahi tantum debeat augmentum Declinationis quod Sol ab obſeruatione matutina ad ſequentem acquiſiuit, vt habeatur quam proxime illa, quam Sol eodem tempore habiturus fuiſſet, ſi ſemper in eodem parallelo motus fuiſſet; illud vero augmentum elicitur ex collatione duarum altitudinum meridianarum, adeoque ex immediatis obſeruationibus, ſupponendo nempe, quod in diſtantia non valde magna KN Declinationes temporibus proportionaliter creſcant. Reducta itaque altitudine inuenta RN ad altitudinem QL in eodem parallelo HLOKI, calculus inſtituitur, ac ſi Sol nullam Declinationis mutationem paſſus fuiſſet, et obtinetur altitudo meridiana ficta DH, quae deinde, adiecta ad ipſam parte proportionali pro interuallo temporis ab obſeruatione prima ad meridiem FH. mutatur in altitudinem meridianam veram DF.

§. 8. Igitur die 8 Iunii ſtyli veteris, obſeruaui temporibus veris ante meridiem ſequentes altitudines veras centri Solis, nempe

H	′	″		°	′	″
6	41	7	- - -	25	15	33
9	25	53	- - -	44	44	57

ex quibus, adhibita correctione praecedentis paragraphi, inuenta fuit altitudo vera meridiana centri Solis eiusdem diei $53^{\circ}\ 31'\ 20''$. Die 9 Iunii nactus fui sequentes obseruationes

H	′	″		°	′	″
6	36	52	- - -	24	43	51
9	25	49	- - -	44	44	57

ex quibus calculus produxit altitudinem meridianam sequentem $53^{\circ}\ 31'\ 54''$. Pro Iunii 10 non potui praefata commoditate vti, adeoque coactus fui altitudinem meridianam in Quadrante inuentam retinere. Quoniam autem video, altitudines duas calculatas minores esse per Quadrantem obseruatis $4''$ et $6''$, hinc assumo mediam inter has differentias $5''$, eamque ab altitudinibus in Quadrante repertis subtraho, vt adeoque altitudines veras centri Solis habeam sequentes:

Iunii 8	- - -	53	31 20
9	- - -	—	31 54
10	- - -	—	32 10
12	- - -	—	31 55
13	- - -	—	31 0

ex quibus Solstitii momentum poterit definiri.

§. 9. Sequar autem primo methodum Celeb. Hallei, quam exposuit in Transact. Anglic. A. 1695, repetiit deinde Dau. Gregorius in Astron. Phys. et Geometr.

metr. Elementis pag. 221. Edit. Oxon. eamque applicabo ad casum illum, quem altitudines tres priores exhibere possunt. Referat idcirco DHM Tropicum Cancri, et curua EFGH illam lineam, quam Sol motu suo proprio circa Solstitium describit. Quoniam puncta E, F, G, non multum distant a puncto Solstitiali H, erunt lineolae GB, CF, ED, vti quadrata arcuum HG, HF, HE, vel vti quadrata his proxime aequalium BH, CH, DH, aut GI, FK, EL, per Lemma XI. Princip. Newtoni. Quare curua EFGH erit quam proxime Parabola communis Apolloniana; atque, pro inueniendo puncto H, data erunt sequentia, DC, CB, distantiae obseruationis primae et secundae, secundae et tertiae; LK, KI, differentia altitudinis primae et secundae, secundae et tertiae. Ponantur ergo $DB = a$, $CB = b$, $LI = m$, $KI = n$, $BH = x$, $HI = y$, et vocata Parabolae parametro $= p$, est I. $py = x^2$, vel $p = \frac{x^2}{y}$. II. $py + pn = b^2 + 2bx + x^2$, III. $py + pm = a^2 + 2ax + x^2$. Substituto valore ipsius p in II. fit $\frac{nx^2}{b^2+2bx} = y$; in III. fit $\frac{mx^2}{a^2+2ax} = y$; hinc aequatis valoribus ipsius y, est $x = \frac{a^2n - b^2m}{2bm - 2an}$.

Fig. 1.

§. 9. Quodsi iam applicatio fiat ad obseruationes, erit $a = 2$, $b = 1$, $m = 50$, $n = 16$, adeoque $x = \frac{7}{17} = 9'\ 20''$, vnde concludo Solstitii momentum fuisse Petroburgi die 10 Iunii st. v. $9^h\ 20'$, ante meridiem temporis veri; quo tempore Tabulae Hirsanae exhibent locum Solis in $\text{II}\ 29^\circ\ 59'\ 29''$, qui

à vero Solſtitio non niſi 31″ differt. Poſſem quoque alias tres altitudines aſſumere, atque ex iis momentum Solſtitii reperire: ſed qua nullis magis fido, quam tribus prioribus, in his acquieſco.

§. 11. Quodſi ex iisdem datis inquiratur in Solſtitii momentum iuxta methodum b. *Maieri* noſtri, in T. II. Commentar. Academiae huius publicatam p. 185. erit, ſubtracta altitudine prima à reliquis duabus, ſeries altitudinum 0. 34. 50. dierum vero 0. 1. 2. poſito itaque dierum numero x, erit formula pro exhibendis altitudinibus $43x-9x^2$, cuius differentiale aequatum nihilo, ex methodo de maximis et minimis, exhibebit $43dx-18xdx=0$, vel $x=2\frac{7}{18}$, vnde additis diebus 8 ab initio ſubtractis oritur Solſtitii momentum Iunii $10\frac{7}{18}$ idem quod ante ex methodo Halleii; id quod ex tribus aſſumtis altitudinibus neceſſario ſemper fiet, cum vterque in hoc caſu per tria data puncta Parabolam communem deſcribat. Cum vero in Halleiana Solutione non liceat plura ſimul quam tria puncta eligere, vtpote per quae Parabola ordinaria determinatur: id ſingulare habet methodus Maieriana, quod ex pluribus ſimul quam tribus punctis Solſtitium determinare poſſit. Verum enim vero in tali caſu neceſſe eſt, vt Curua motus Solaris EFGH [illegible] matur eſſe Parabola altioris generis, non vero ordinaria, id quod demonſtrationi Halleianae, quod nempe Curua EFGH ſit Parabola vulgaris, contrariari videtur.

§. 12.

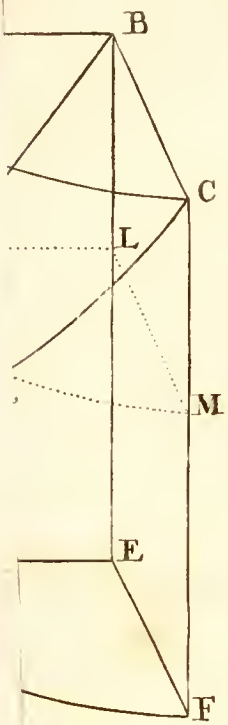
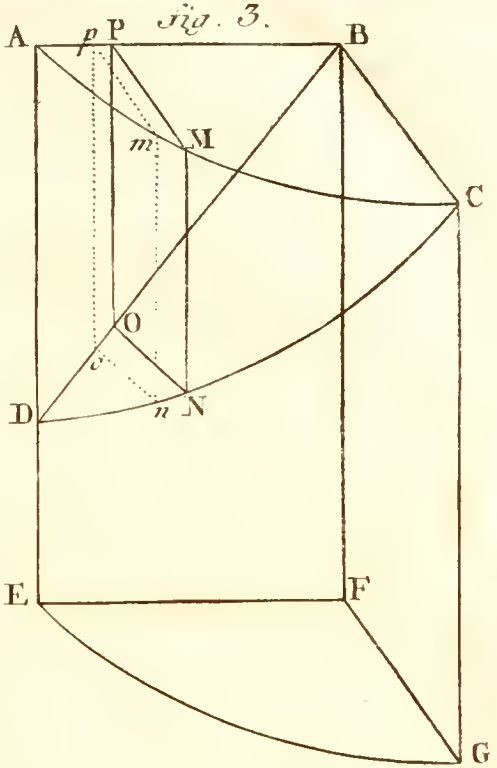


fig. 3.



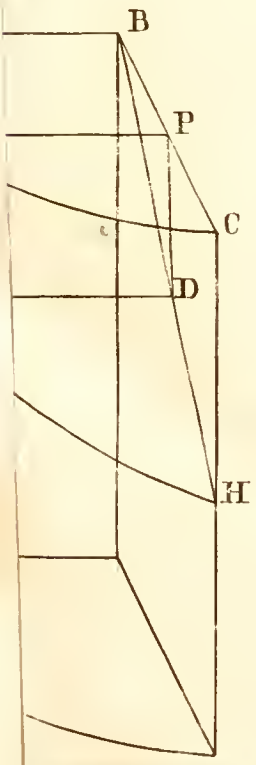
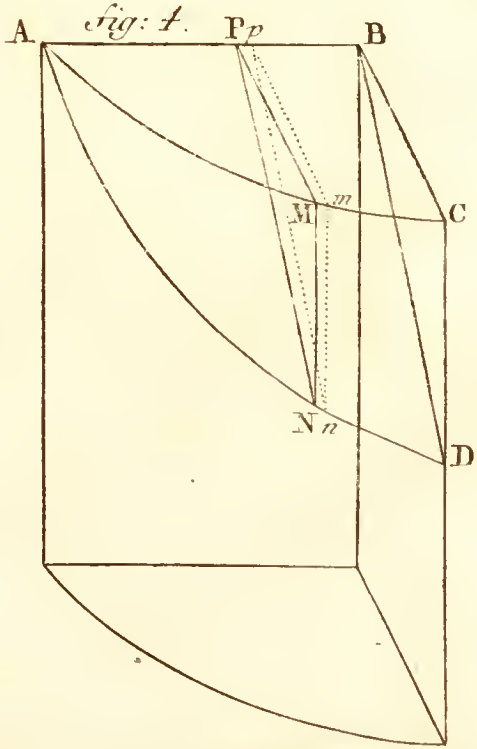


fig: 4.



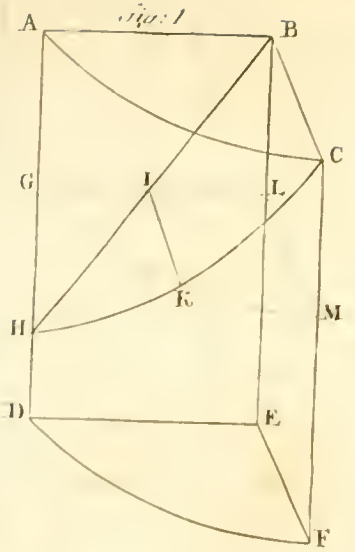


fig: 1
A
B
C
G
I
L
K
H
M
D
E
F

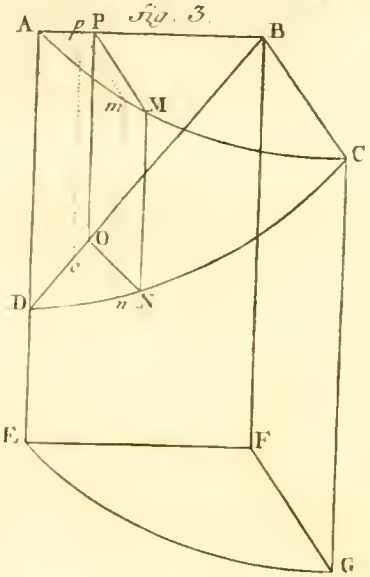


fig. 3.
A
p
P
B
m
M
C
O
o
D
n
N
E
F
G

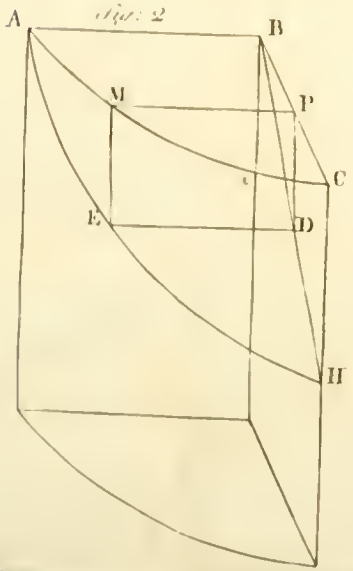


fig: 2
A
B
M
P
C
E
D
H

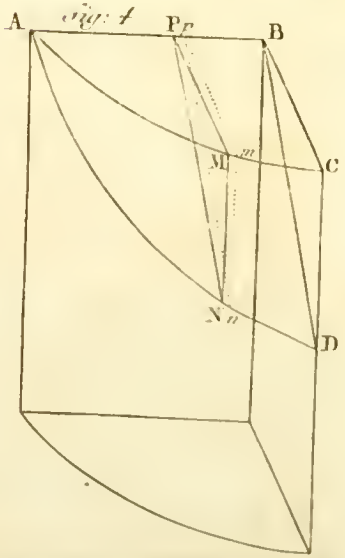


fig: 4
A
P p
B
m
M
C
N n
D

§. 12. Quod ad altitudinem Solſtitialem attinet, ea ex methodo Halleiana deducitur fuiſſe $53^{\circ}\ 32'\ 11''$. Sin igitur aſſumam Obliquitatem Eclipticae in Tomo II. horum Commentar. pag. 512. à Clariſſ. *De l'Isle* publicatam, $23^{\circ}\ 28'\ 30''$, eruitur exinde Elevatio Aequatoris Petropolitana $30^{\circ}\ 3'\ 41''$, quae non male congruit cum eâ, quae media eſt inter vtramque loco cit. repertam, nempe $30^{\circ}\ 3'\ 58''$.

DE VNGVLIS CYLINDRORVM VARII GENERIS,

AVTHORE

Georgio Wolffg. Krafft.

§. 1.

INueniuntur paſſim apud ſuperioris ſeculi Geometras Theoremata de Vngulis variorum Cylindrorum, quas quilibet eorum propria ſibi methodo, et magno ingenio, examinauit. Praecipuam ſibi laudem in hac materia comparauit *Gregorius à Sancto Vincentio*, qui integro tractatu egit de Vngula Cylindri Circularis atque Parabolici, vbi omnes earum proprietates acute admodum eruit, ita vt mira ſit ibi copia Propoſitionum, quae Calculi Integralis hodie imperio ſubſunt, cuius feliciſſimae inuentioni ille ingenio ſuo propius quaſi Tab. II. et III

praeluſit. Occurrunt ſubinde alia inuenta huius generis *Roberualli*, *Walliſii*, aliorumque, quaelibet Auctorum ſuorum acumine digna; oſtenditque Cel. *Halleius* phyſicum aliquem earum vſum, in exhibendo proportionali gradu caloris Solaris, quamdiu in loco aliquo dato Sol eſt ſupra horizontem. Vid. Transact. Anglic. 1693. pag. 878. Triplici autem cura omnes circa haec corpora verſati ſunt, dum alii ſoliditatem eorum, alii ſuperficiem, alii vero vtrumque, examinauerunt; methodo autem non vna omnes vſi fuerunt, ſed quilibet talem ſibi ſelegit operam, in qua maxime verſatus eſſet. Fateor, negotium noſtra aetate non amplius, qua tum, difficultate premi: dedi tamen operam, vt in hoc ſcripto, ope methodi à recentioribus inuentae, et hodie pulcherrime excultae, eidem filo inuentionis diuerſorum labores innectam, adiiciamque praeterea Cylindros hucusque non examinatos, in quorum Vngulas, earumque ſoliditatem inquiro. Quamuis enim via ad hoc Propoſitionum genus culta admodum hodie ſit, et ſtrata: non eam tamen ob id minus frequentandam eſſe cenſeo; quippe quae inuenta eſt, non vt impediret, ſed vt adiuuaret Geometriam, eiusque nobis foecunditatem indicaret.

§. 2. Notiſſima eſt *Euclidis* Definitio Cylindri, quod nempe ſit, ſolidum ortum ex rotatione rectanguli circa latus alterutrum pro axe aſſumtum. Cum vero haec Definitio non comprehendat niſi Cylindros Circulares: melius pro meo inſtituto aſſumam deſcriptionem Sereni, qui, aſſumto plano horizontali circulari,

lari, ſupponit, illud ſurſum moueri motu ſibi ſemper parallelo. Prout igitur motus hic perpendiculariter procedit ad planum horizontale pro baſe aſſumtum, aut inclinate, Cylindrus vel Rectus, vel Obliquus exexſurgit. Ad hanc itaque imitationem aſſumam planum horizontale pro baſe, loco Circuli curua quacunque definitum, ſurſum motu ſibi ſemper parallelo moueri; qua ratione Cylindri diuerſi, pro diuerſa natura Curuae in plano aſſumtae, oriuntur. Atque Obliquorum quidem Cylindrorum tractationem peculiarem praeteribo, quoniam quicquid de Rectis demonſtratur, debito modo adhibito ad Obliquos facile poteſt applicari. Itaque appellabo Vngulam, ſolidum ortum ex ſectione Cylindri cuiuscunque ad axem eius oblique factâ, et inchoata in alterutra eiusdem Cylindri baſe.

§. 3. Leui autem attentione patet, duplici ſectionis modo poſſe erui ex Cylindro Vngulam, prout nempe ſectionis initium ſit aut in ordinata aliqua, aut vero in ipſo Axe, baſis Cylindricae. Illas vocabo Vngulas per Ordinatam, has vero Vngulas per Axem. Ita ex. gr. poſito axe AB, applicata normali BC, eſt ABCH ſemi-vngula per Ordinatam; ſed ABCH ſemivngula per Axem; vtque habeantur Vngulae integrae, ibi addenda eſt aequalis ſemi-vngula ex parte ipſius AB, hic vero ex parte ipſius BC. Videbimus mox, has Vngulas inter ſe eſſe diuerſiſſimas; quamuis haec diſtinctio apud citatos Auctores non occurrat; vtpote qui modo hanc modo illam elegerunt, prout vnam alterâ commodiorem methodo adhibendae iudicarunt. Tab. II. Fig. 1. Fig. 2.

§. 4.

§. 4. In qualibet sectione Cylindri cuiuscunque efficitur noua Curua, in superficie Cylindri terminata, quae primo loco erit examinanda. Sit igitur semi-
Fig 1. cylindrus ABCDEF, cuius bases sunt ABC et DEF, plana terminata curua quacunque AC, DF; transeat primo sectionis planum per ordinatim applicatam BC, quae sit normalis ad Axem AB, vt exinde oriatur semi-vngula per ordinatam BCKHIBA. Apparet itaque, ex hac sectione ortam esse nouam Curuam CKH, cuius axis idem est cum axe sectionis, HB. Per planum noua hac sectione terminatum intelligatur transire basis LIGKM, parallela basibus Cylindri, et communis sectio planorum sit IK; statim intelligitur, duas hasce curuas communem habere ordinatim applicatam IK, abscissas vero GI et HI esse in ratione rectarum constantium AB, BH, ob triangula HGI, et HAB similia; adeoque abunde patet, curuam ex tali sectione oriundam dimensionem baseos suae nunquam mutare, sed ad eandem indeterminatarum dimensionem assurgere, ad quam curua pro base assumta assurgit. Ita ex. gr. si basis sit Parabola Apolloniana, cuius aequatio, vocata Parametro p, est $p.GI = IK^2$, erit, ob $GI:HI = AB:HB$, $GI = \frac{HI \times AB}{HB}$, et aequatio alterius curuae HKC haec: $\frac{p.AB}{HB} \times HI = IK^2$, quae habebit Parametrum $\frac{p.AB}{HB}$, vti illa habuit solam p. Atque hoc est quod demonstrat *à Sancto Vincentio*, ex sectione Cylindri Parabolici rursus emergere Parabolam, sed diuersae Parametri. Referri huc etiam potest inuentum Sereni, qui inter Veteres primus docuit, Ellipsin produci

quoque

quoque poſſe ex ſectione Cylindri; talis enim ſectio producit curuam vngularem, quae, vti oſtenſum eſt, à dimenſione baſeos ſuae nunquam recedit. Idem plane ratiocinium eſt in Curua tali orta è ſectione per axem AEH. Eſt enim et hic $DE=PM$, et abſciſſa noua HD ad priorem CP in ratione conſtanti ipſius HB ad CB.

§. 5. Indagare nunc igitur oportet formulas generales harum Vngularum, et primo quidem earum, quarum ſectio incipit in ordinatim applicata BC ad axem baſeos AB normali, et continuatur ſub angulo ABD quocunque oblique ad axem Cylindri BF vsque in D. Sit in hunc finem ſemi-cylindrus rectus quilibet, ortus ex deſcenſu figurae ABC per perpendicularem ADE. Curuae AMC axis ſit AB, orthogonaliter applicatae PM, BC, et fiat ſectio per ordinatam BC, terminetur que in D, vt inde exſurgat ſemi-vngula ABCD. Ducatur applicata quaeuis PM, cum alia infinite propinqua pm; ex punctis M, m, P, p, demittantur perpendiculares MN, mn, PO, po, et coniungantur puncti ON, on, vt habeatur Elementum Vngulae dimidiae Pn. Poſitis itaque $AB=a$, $BC=b$, $AD=c$, $BP=x$, $PM=y$, erit Elementum areae $PpmM=ydx$; ex analogia $AB(a):AD(c)=PB(x):PO(\frac{cx}{a})=MN$, fiet elementum ſemi-vngulae per ordinatam, quam exprimam per $dV=\frac{cyxdx}{a}$; ſed Integrale ipſius ita ſumi debet, vt facto in eo $x=0$, fiat $V=0$. Eadem fere formula fit ſemi-vngulae per axem. Sit enim et hic $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $AP=x$, $PM=y$. Tabula II. Fig. 3.

Ex similitudine triangulorum PMN et BCD oritur analogia haec: $BC(b) : CD(c) = PM(y) : MN(\frac{cy}{b})$; ergo area PMN, quae est $= \frac{cy^2}{2b}$, ducta in elementum Pp vel dx, exhibebit elementum semi-vngulae per axem sectae, quam exprimo per $du = \frac{cy^2 dx}{2b}$, cuius Integrale ita sumendum, vt facto $y = 0$, u euanescat.

§. 6. In iisdem Figuris eruitur quoque elementum superficiei vtriusque semi-vngularis. Nempe ex prio-
Fig. 3. ribus habetur $Mm = V(dx^2 + dy^2)$, adeoque pro semi-vngulis per ordinatam $NM \times Mm = \frac{cx\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{a} = dS$, quae formula erit pro determinandis superficiebus semi-vngularum per ordinatas efectarum; eius vero Integrale ita sumendum, vt facta $x = 0$, fiat $S = 0$. Pro superficiebus vero semi-vngularum per axem factis, erit
Fig. 4. $Mm \times MN = \frac{cy\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{b} = ds$, cuius Integrale ita sumendum, vt facta $y = 0$, fiat $s = 0$.

§. 7. Accedam nunc his praemissis propius ad excutiendas variorum Cylindrorum Vngulas, et primo quidem ad eas, quae originem suam debent Cylindro com-
Tabula III. Fig. 1. muni, seu Circulari. Sit igitur semi-cylindrus Circularis AF, atque efecetur ex eo Vngula dimidia BOD, positis $BP = x$, $PM = y$, $BA = a$, $BO = b$, CA radio circuli $= r$, erit $AP = a - x$, atque $PK = 2r - a + x$, vnde, ob $PM^2 = AP \times PK$, erit $y = V(2ar - a^2 + 2ax - 2rx - x^2)$, vnde fit $\frac{adV}{c} = yx\,dx = x\,dx\,V(2ar - a^2 + 2ax - 2rx - x^2) = (x\,dx - \overline{a-r}\,dx)\,V(2ar - a^2 + 2ax - 2rx - x^2) + \overline{a-r}\,y\,dx$. Quae formu-

formula ſi integretur ſic, vt facto $x=0$, fiat $V=0$, oritur $V=\frac{c(b^3-y^3)}{3a}+\frac{c.a-r}{a}$ PBOM; vnde patet, generalem totius vngulae Cubaturam dependere à Quadratura ſpatii Circularis PBOM. Si vero ſectio intelligatur fieri per ipſum centrum baſeos C, tum fiet $a=r$, $b=r$, quo facto membrum ſuperius non-integrabile euaneſcit, fitque $V=\frac{c(r^3-y^3)}{3r}$. Pro tota Vngula dimidia obtinenda ponatur $y=0$, vel $x=a$, eritque $V=\frac{cr^2}{3}$, hoc eſt: ſemi-vngula per ordinatam Cylindri Circularis, cuius ſectio transit per centrum Circuli C, aequalis eſt Pyramidi quadrangulari, cuius baſis eſt Quadratum radii CA, et altitudo AD.

§. 8. Pro eruenda ſoliditate ſemi-Vngulae per axem eiusdem Cylindri, aſſumi debet AP pro abſciſſa; quare retentis reliquis prioribus, et vocata abſciſſa $AP=x$, erit nunc $y^2=2rx-x^2$, et $\frac{2bdu}{c}=y^2\,dx=2rx\,dx-x^2\,dx$, cuius Integrale ſumtum ita, vt poſito $x=0$ euaneſcat u, eſt $u=\frac{crx^2}{2b}-\frac{cx^3}{6b}$, vnde patet, hanc Vngulam per axem abſolute integrabilem eſſe. Si ponatur $x=a$, erit ſemi-vngula integra $=\frac{cra^2}{2b}-\frac{ca^3}{6b}$; ſi vero ſit $a=r$, erit etiam $b=r$, quare ſoliditas Vngulae per axem hoc caſu erit $\frac{cr^2}{3}$, eadem quae prioris Vngulae per ordinatam in eodem caſu.

§. 9. In eodem Cylindro Circulari, poſitis omnibus vti in §. 7. eruitur $V(dx^2+dy^2)=\frac{rdx}{\sqrt{(2ar-a^2+2ax-2rx-x^2)}}$ $=\frac{rdx}{y}$, vnde fit $\frac{adS}{cr}=\frac{x\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{r}=\frac{xdx-a-r.dx}{\sqrt{(2ar-a^2+2ax-2rx-x^2)}}$

$+\frac{\overline{a-r}.dx}{y}$, quae aequatio integrata ſic, vt poſito $x=o$, et conſequenter $y=b$, fiat $S=o$, abit in hanc $S=\frac{b\overline{cr-cry}+\overline{c.a-r}.OM}{a}$, ex quo patet, Quadraturam generalem ſpatii vngularis dependere à rectificatione arcus circularis OM. Si vero ponatur rurſus ſectio transire per Centrum C, erit $a=r$, et $b=r$, quo caſu fit $S=cr-cy$, et abeunte x in r, hoc eſt, facto $y=o$, erit ſpatium integrum ſemi-vngulare $ODA=cr=$ Rectangulo $AD\times AC$; vel denique poſito $c=r$, erit idem ſpatium $ODA=r^2$, id eſt, aequale Quadrato radii; quod Theorema *Paſcalio* adſcribitur in Comment. Acad. Scient. Pariſ. Anni 1707, pag. 330. Edit. Pariſ. occurrit vero idem quoque in *Gregorii à Sancto Vincentio* Tractatu de Vngulis Cylindricis Prop. LV. *Paſcalius* quidem Theorema pronunciauit de ſumma ſinuum omnium rectorum totius Quadrantis ab arcu AO perpendiculariter demiſſorum: ſed facile eſt demonſtrare, ſinus hoc modo demiſſos ſuperficiem Vngularem modo explicatam efficere in tali Cylindro.

§. 10. Pro ſuperficie ſemi-vngulari per axem ſecta, fit iuxta ductum §. 8. $y=V(2rx-x^2)$, et $V(dx^2+dy^2)=\frac{rdx}{y}$, quare $\frac{bds}{c}=yV(dx^2+dy^2)=rdx$, et facta integratione ſic vt abeunte x in o, et conſequenter $y=o$, fiat $s=o$, prodit $s=\frac{crx}{b}$, atque talis ſuperficies abſolute eſt quadrabilis. Poſito igitur $x=a$, eſt ſuperficies integra $=\frac{acr}{b}$, facta $a=r$, et conſequenter $b=r$, eadem ſuperficies eſt cr, et poſito denique $c=r$, eadem eſt $=r^2$; hoc eſt, eadem cum illa, quae exſurgit ex Vngula per ordinatam hoc modo ſectâ.

§. 11.

§. 11. Sit Cylindrus Parabolicus AEOEGF, ponantur in eo $AB=a$, $BO=b$, $AD=c$, $BP=x$, $PM=y$, parameter $=1$, erit $AP=a-x$, atque pro infinitis Parabolis erit $AP=PM^m$, aut vero $a-x=y^m$, vnde deducitur $\frac{adV}{c}=yxdx=my^{2m}dy-amy^m dy$, quae aequatio integrata sic vt posito $x=o$, consequenter $y=b$, fiat $V=o$, dabit hanc: $V=\frac{acm^2b^{m+1}+(\overline{m+1}.y^m-2m+1.a)mcy^{m+1}}{(2m+1)(m+1)a}$ quia nempe est etiam $a=b^m$. Ponatur $x=a$, aut quod eodem recidit $y=o$, habebitur soliditas integrae semi-vngulae $ABOD=\frac{cm^2b^{m+1}}{(2m+1)(m+1)}$. Igitur pro Parabola ordinaria, in qua $m=2$, obtinebitur soliditas semi-vngulae per ordinatam $\frac{4abc}{15}$, hoc est, aequalis Pyramidi quadrangulari, cuius basis est Rectangulum $AB\times BO$, altitudo autem $\frac{4}{5}AD$. Fig. 3.

§. 12. Pro eiusdem Cylindri Parabolici Vngula per axem, assumenda erit aequatio sequens $x=y^m$, quare $\frac{2bdu}{c}=y^2dx=my^{m+1}dy$, quae aequatio integrata sic vt posito $y=o$, fiat quoque $u=o$, dabit $u=\frac{cmy^{m+2}}{2b(m+2)}$; posito $y=b$, emergit soliditas semi-vngulae per axem integrae $=\frac{cmb^{m+1}}{2.(m+2)}$. Fit ergo pro Parabolis ordinariis, in quibus $m=2$, soliditas semi-vngulae per axem $=\frac{cb^3}{4}=\frac{abc}{4}$ ob $a=b^2$, hoc est, aequalis Pyramidi quadrangulari, cuius basis est Rectangulum

$AB \times BO$, altitudo autem $\frac{3}{4}c$. Eſt itaque Vngula prior ad hanc in ratione 16 ad 15.

§ 13. Pro ſuperficiebus harum Vngularum reſumatur aequatio §. 11. $a-x=y^m$, ne autem calculus enadat nimis moleſtus, aſſumamus tantum, pro Parabola vulgari, $a-x=y^2$, erit itaque $\sqrt{(dx^2+dy^2)} = dy\sqrt{(4y^2+1)}$, hinc $\frac{ads}{c} = x\sqrt{(dx^2+dy^2)} = (a\,dy-y^2\,dy)\sqrt{(4y^2+1)} = \frac{(a\,dy-y^2\,dy)(4y^2+1)}{\sqrt{(4y^2+1)}} = \frac{(4a-1)y^2dy-4y^4dy+a\,dy}{\sqrt{(4y^2+1)}}$; cuius Integrale vt habeatur, pono illud appariturum eſſe ſub hac forma $(\alpha y-\beta y^3)\sqrt{(4y^2+1)}+\gamma\int\frac{dy}{\sqrt{(4y^2+1)}}$; facta differentiatione huius expreſſionis, et terminis homologis comparatis, inuenitur $\alpha=\frac{16a-4}{32}$, $\beta=\frac{1}{4}$, $\gamma=\frac{-16a+1}{32}$, quibus ſubſtitutis oritur: $S=\frac{c}{a}\left(\frac{16a-1}{32}y-\frac{1}{4}y^3\right)\sqrt{(4y^2+1)}-\frac{c(16a-1)}{32a}\int\frac{dy}{\sqrt{(4y^2+1)}}$ + conſtante aliqua. Sed notum eſt, membrum huius aequationis inintegrabile dependere à Quadratura Hyperbolae; quare etiam ſuperficiei huius Vngularis Quadratura ab eadem pendet.

§. 14. Pro ſuperficie vero Vngulae Parabolicae per axem aſſumo $x=y^2$, vnde $\sqrt{(dx^2+dy^2)} = dy\sqrt{(4y^2+1)}$, et $\frac{bds}{c}=y\sqrt{(dx^2+dy^2)}=y\,dy\sqrt{(4y^2+1)}$, quae aequatio ſic integrata, vt poſito $y=0$ fiat $s=0$, efficit ſequentem: $s=\frac{c(4y^2+1)^{\frac{3}{2}}-c}{12b}$; ex quo apparet, hanc Vngulam per axem Geometricam habere ſuperficiem, quae, poſito $y=b$, integra euadit $=\frac{c(4b^2+1)^{\frac{3}{2}}-c}{12b}$.

§. 15.

fig: 2

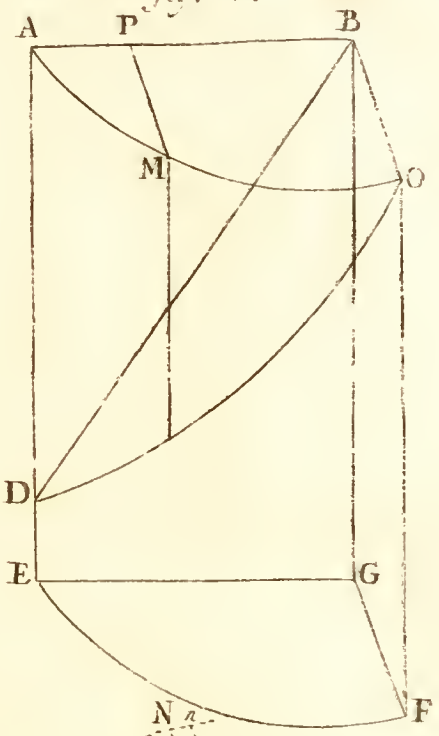


fig: 3

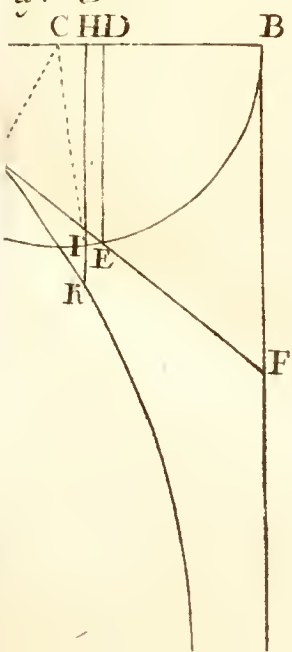


fig 4

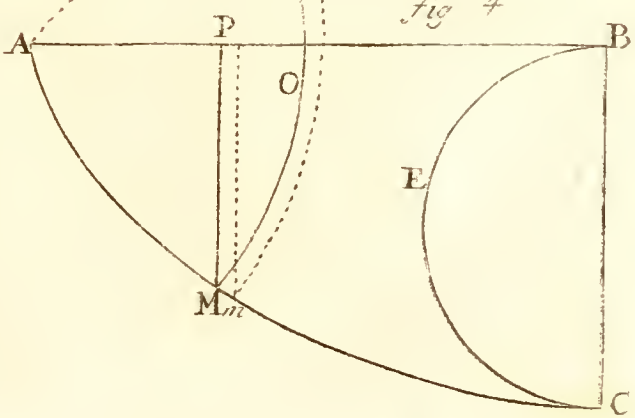


fig. 1

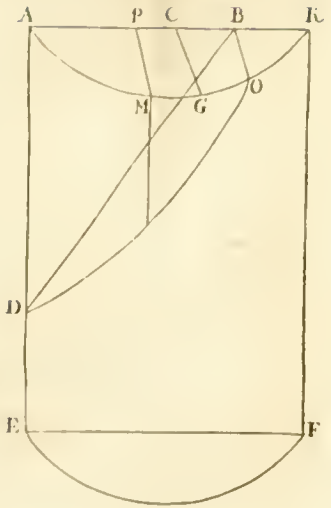


fig. 2

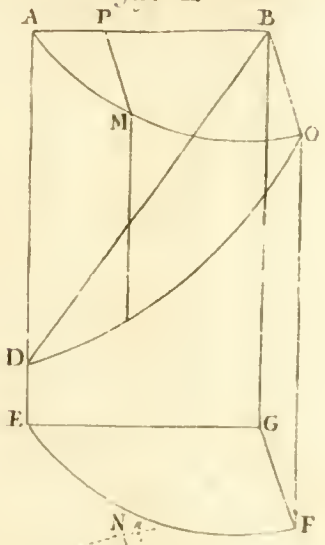
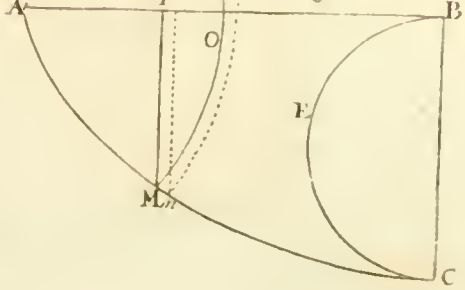


fig. 3

fig. 4



§. 15. Assumamus nunc Cylindrum Ellipticum A GKEF, in quo sit Ellipseos semi-axis maior AC$=m$, semi-axis minor CG$=n$, AB$=a$, BO$=b$, BP$=x$, PM$=y$, eritque AP$=a-x$, PK$=2m-a+x$, atque ex nota Ellipseos proprietate habebitur $\frac{my}{n}=V(ae+fx-x^2)$ positis nempe $2m-a=e$, atque $a-e=f$, vnde orietur $\frac{madV}{cn}=xdxV(ae+fx-x^2)=(xdx-\frac{1}{2}fdx)V(ae+fx-x^2)+\frac{1}{2}fdxV(ae+fx-x^2)=(xdx-\frac{1}{2}fdx)V(ae+fx-x^2)+\frac{mf}{2n}ydx$; cuius Integrale ita sumtum, vt posito $x=0$ euanescat V, dabit $V=\frac{a^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3}{2}}cn-cn(ae+fx-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3am}+\frac{f}{2a}\times$PBOM, ex quo patet, generalem Cubaturam huius Vngulae per ordinatam dependere à Quadratura spatii Elliptici PBOM, et consequenter à Quadratura Circuli. Si vero ponatur $f=0$, hoc est, $a=e$, si scilicet supponatur, sectionem transire per ipsum centrum Ellipseos, quo casu est $m=a$, $n=b$, tum euanescet membrum aequationis non-Integrabile, eritque $V=\frac{m^3cn-cn(m^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3m^2}$; itaque si x abeat in m, inuenietur soliditas talis Vngulae dimidiae integra haec $\frac{mcn}{3}$, hoc est, in Cylindro Elliptico semi-Vngula per ordinatam, cuius sectio transit per centrum, par est Pyramidi quadrangulari, cuius basis est Rectangulum AC $\times$CG, altitudo vero AD. Tabula III. Fig. 1.

§. 16. Si quaeratur eiusdem Cylindri Elliptici Vngula per axem, tunc erit, vocata iam AP, x, manentibus

tibus reliquis vt modo ante, $y^2 = \frac{n^2(2mx-x^2)}{m^2}$, vnde $\frac{2bdu}{c} = y^2\,dx = \frac{2mn^2x\,dx-n^2x^2dx}{m^2}$, cuius Integrale debito modo sumtum efficit: $u = \frac{cmn^2x^2-\frac{1}{3}cn^2x^3}{2m^2b}$, ex quo perspicitur, talis Vngulae Cubaturam absolutam dari. Abeunte x in a ergo, erit soliditas talis semi-Vngulae per axem integra $= \frac{cmn^2a^2-\frac{1}{3}cn^2a^3}{2bm^2}$; et si sectio terminetur in centro Ellipseos, hoc est, si fuerit $a = m$, $b = n$, erit $u = \frac{mcn}{3}$, hoc est, aequalis Pyramidi quadrangulari, cuius basis est rectangulum $AC \times CG$, altitudo vero AD. Superficies autem harum Vngularum, cum non nisi prolixo calculo eruantur; nec non Vngulas Hyperbolicas, cum facile ex Ellipticis, mutatis tantum signis, deducantur: breuitati studens, lubens praetereo.

§. 17. Examinatis itaque Vngulis quae ex Cylindris sectionum Conicarum oriuntur, transeo ad alias quasdam Curuas; vbi quidem primo praeterire non possum illam Curuam, cuius Celeberr. *Ioannes Bernoulli* mentionem facit in Actis Lipsi. Anni 1695. p. 550. et quae exprimitur aequatione differentiali hac $x^2\,dx + y^2\,dx = a^2\,dy$; cuius Indeterminatae separari nequeunt. Docet ibidem Celeberr. Vir inuenire aliam Curuam, quae per puncta flexus omnium Curuarum aequationi allegatae competentium transeat. Eandem curuam admittere quoque Integrationem absolutam Vngulae suae per axem, statim in oculos incurrit. Est enim in ea $\frac{cy^2dx}{2b} = \frac{a^2cdy-2x^2dx}{2b} = du$, consequenter $u = \frac{a^2cy-\frac{1}{3}cx^3}{2b} + A$.

§. 18.

§. 18. Sit Ciſſois AMK, cuius circulus generator ANEB. Poſitis AP$=t$, PM$=y$, AB$=2r$, fiat ſectio per ordinatam HK, ita vt ſint AH$=a$, HK$=b$; atque erit, ex natura Ciſſoidis, aequatio $t^3 = 2ry^2 - ty^2$; vocata igitur HP$=x$, vt formulae noſtrae natura requirit, orietur $\frac{adV}{c} = yx\,dx = \frac{(a-x)^{\frac{3}{2}}x\,dx}{\sqrt{(2r-a+x}}$. Ponatur denuo $a-x=t$, et ſubſtituatur hic valor in expreſſione inuenta, erit $\frac{adV}{c} = \frac{t^{\frac{3}{2}}(tdt-adt)}{\sqrt{(2r-t)}} = \frac{t^2dt-at^2dt}{\sqrt{(2rt-t^2)}}$. Quia autem praeuideo, Integrale huius formulae habiturum eſſe hanc faciem generalem, $(\alpha t^2 + \beta t + \gamma)\sqrt{2rt-t^2}) + \delta\int\frac{dt}{\sqrt{(2rt-t^2)}}$, comparo terminos homologos poſt factam differentiationem, et inuenio $\alpha = -\frac{1}{3}$, $\beta = \frac{3a-5r}{6}$, $\gamma = \frac{3ar-5r^2}{2}$, $\delta = \frac{5r^2-3ar^2}{2}$, quibus ſubſtitutis, et expreſſione ſic ordinata, vt abeunte t in a, fiat V$=o$, habetur Integrale completum $\frac{aV}{c} = (\frac{3ar-5r^2}{2} + \frac{3a-5r}{6}t - \frac{1}{3}t^2)\sqrt{(2rt-t^2)} - (5r-3a)NCI - \frac{4ar-15r^2+a^2}{6}\sqrt{(2ar-a^2)}$; vnde patet, Cubaturam generalem huius Vngulae per ordinatam dependere à rectificatione arcus Circularis NI. Si deſideretur ſoliditas ſemi-vngulae integra, ponatur $t=o$, quo facto fiet NCI$=$ACI, atque habebitur V$= \frac{15r^2-a^2-4ar}{6a}c\sqrt{(2ar-a^2)} - \frac{5r-3a}{a} - c\times$ACI. vnde ſi ponatur $a=2r$, erit V$= \frac{cr\times$AIEC$}{a}$, hoc eſt, ſi $c=a$; erit haec vngula aequalis Cylindro, cuius baſis eſt Circulus generator, altitudo radius AC. Cum vero recta BF, perpendicularis ad Diametrum AB, ſit Aſymptotus Ciſſoidis AK, euidens eſt ſemi-vngulam talem, cuius ſectio ſit iuxta ordinatam BF, por-

Tabula VII. Fig. 3.

rigi verſus F in infinitum; quare huius ſolidi infinite magni ſoliditas erit finita; id quod olim mirum videbatur *Gaſſendo*, Phyſ. Sect. I. lib. 3. cap. 5. Oper. Tom. I. poſtquam viderat *Cauallerium* et *Toricellium* ſimile quid demonſtraſſe de alio quodam ſolido infinite longo. Si vero ponatur $a = \frac{5}{3}r$, euaneſcet ſector Circularis, et ſemi-vngula per ordinatam hoc modo genita erit $= \frac{5r^2c\sqrt{5}}{27}$, hoc eſt, aequalis Pyramidi quadrangulari, cuius baſis aequalis quadrato radii AC, altitudo vero $= \frac{5\sqrt{5}}{9}c$. Eiusdem vero Ciſſoidis Vngula per axem inuenietur dependere à Logarithmis.

Fig. 4.

§. 19. Sit denique Curua CMA Cyclois, orta ex reuolutione Circuli generatoris CEB, ſintque AP $= x$, PM $= y$, BC $= b = 2r$, et fiat ſectio iuxta axem AB, ita vt oriatur ſemi-vngula per axem; erit aequatio ad Cycloidem $\frac{y\,dy}{\sqrt{(2ry-y^2)}} = dx$, quare $\frac{2bdu}{c} = y^2dx = \frac{y^3dy}{\sqrt{(2ry-y^2)}}$, cuius Integrale pono habere hanc formam $(\alpha y^2 + \beta y + \gamma)\sqrt{(2ry-y^2)} + \delta\int\frac{dy}{\sqrt{(2ry-y^2)}}$, vnde facta differentiatione, et comparatis terminis homologis, fiunt $\alpha = -\frac{1}{3}$, $\beta = -\frac{5r}{6}$, $\gamma = -\frac{5r^2}{2}$, $\delta = \frac{5r^2}{2}$, ex quo oritur $\frac{2bu}{c} = A - (\frac{1}{3}y^2 + \frac{5r}{6}y + \frac{5r^2}{2})\sqrt{(2ry-y^2)} + \frac{5r^3}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{(2ry-y^2)}}$, ex quo patet, Vngulae huius ſoliditatem dependere ex Quadratura ſectoris circularis. Concipiatur vero ſpatium Cycloidale ABCMA volui circa axem AB per circulum MON: erit poſita ratione radii ad peripheriam $= 1 : \pi$, peripheria integra MON, radio PM $= y$ deſcripta, $= \pi y$, et area integri illius Circuli $= \frac{\pi y^2}{2}$, quae ducta in elementum $Pp = dx$ et

Co-

Conoide, ex hac reuolutione orto, posito $= k$, dabit $dk = \frac{\pi y^2 dx}{2} = \frac{\pi y^3 dy}{2\sqrt{(2ry-y^2)}}$; sed ob $\frac{2bdu}{c} = \frac{y^3 dy}{\sqrt{(2ry-y^2)}}$, est $\frac{\pi y^3 dy}{2\sqrt{(2ry-y^2)}} = \frac{\pi b du}{c}$, ergo erit $dk = \frac{\pi b du}{c}$, quae aequatio sic integrata, vt posito $x = o$, u euanescat, efficit $k = \frac{\pi bu}{c}$, aut $u = \frac{ck}{\pi b}$, vel erit Vngula integra $2u = \frac{2ck}{\pi b}$ Si ergo ponatur $\frac{2c}{\pi b} = 1$, vel $c = \frac{\pi b}{2} =$ peripheriae Circuli generatoris, habebitur $k = u$, hoc est: si fuerit altitudo Vngulae integrae aequalis peripheriae Circuli generatoris: Vngula integra aequalis erit Conoidi orto ex integra circumrotatione semi-Cycloidis AMC circa axem AB, quod Theorema est *Wallisii* in Tractatu de Cycloide pag. 501. Praeterea superficies semi-Vngulae per axem eruitur $\frac{bds}{c\sqrt{(2r)}} = \frac{ydy}{\sqrt{(2ry-y)}}$; cuius Integrale sic sumtum, vt posito $y = o$, fiat $s = o$, dabit $\frac{8}{3}cr - \frac{(cy+4cr)\sqrt{(4r^2-2ry)}}{3r} = s$. Abeunte vero y in $2r$, erit $s = \frac{8cr}{3}$; vnde si altitudo semi-Vngulae fiat $\frac{3}{8}r$, erit eius superficies aequalis Quadrato radii Circuli generatoris.

SOLVTIO SINGVLARIS CASVS CIRCA TAVTOCHRONISMVM.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Tabula IV.

Cum ante annos tres Clariſſ. *Bernoulli* methodum innumeras curuas tautochronas in vacuo inueniendi proponeret, mentionem fecit problematis non parum elegantis, cuius ſolutionem hac ſcheda daturus ſum. Difficillimum quidem eo tempore videbatur hoc problema, et propterea parum ſtudii ad id ſoluendum impendebam. Poſtmodum vero cum diligentius in tautochronas pro fluidis inquiſiuiſſem, vniuerſalem detexi methodum problemata huiusmodi omnia ſoluendi, quae etiam me ad ſolutionem problematis illius manuduxit.

Fig. 3.

§. 2. Problema autem hoc eſt: *Datae curuae* A N B *in* B *adiungere curuam* B M C *eius proprietatis, vt omnes deſcenſus grauis alicubi in curua* B M C *incipientes vsque ad imum punctum* A *fiant temporibus aequalibus.* Oportet ergo inueniri curuam B M C, ex hac conditione, vt ſumto in curua B M C pro lubitu puncto M tempus deſcenſus per M B N A ſit conſtans, neque pendeat

deat a loco puncti M. Seu tempus descensus per M BNA aequale esse debet tempori descensus per curuam datam BNA; qui est casus incidente puncto M in B.

§. 3. Descendat ergo corpus ex puncto M, et quaeramus descensus tempus per arcum MB et BMA. Ducta verticali BP, ponatur $BP = a$, quae igitur litera, quia locum puncti M definit, in expressione temporis per MBA inesse non potest. Curuae datae altitudo AD sit $= c$. Assumantur in vtraque curua applicatae quaecunque QN, et XY iisque proximae qn et xy. Dicantur $AQ = t$, $AN = r$ et $BX = x$, $BY = s$; quarum inter t et r aequatio est data, inter x et s desideratur. Celeritas quam corpus in N habebit est $V(a + c - t) = V(PB + DQ)$. Adeoque tempus quo arcus AN absoluitur est $= \int \frac{dr}{V(a+c-t)}$. Quod integrale ita debet accipi, vt fiat $= 0$, si sit $t = 0$.

§. 4. Deinceps si ponatur $t = c$, habebitur tempus per integram curuam datam BNA, quod igitur erit expositum formula ex a et constantibus composita. Nonnullos computaui casus speciales, et vidi tempus descensus per curuam BNA initio descensus posito in M, semper exponi posse sequente serie $k - \alpha a - \beta a^2 - \gamma a^3 - \delta a^4 - \text{etc.} - \zeta V a - \eta a V a - \theta a^2 V a - \text{etc.}$ cuius in quolibet casu speciali coefficientes α, β, etc. et k poterunt determinari. Hoc tempus igitur additum ad descensus tempus per MB, constans esse debet: atque vt in summa omnes termini litera a affecti sese tollant, necesse est.

§. 5. Ad tempus deſcenſus per curuam MB inueniendum, eſt celeritas in $Y = V(a-x)$ et elementum temporis $= ds : V(a-x)$. Huius integrale ita aſſumtum, vt fiat $= 0$ ſi $x = 0$ dabit tempus deſcenſus per YB, in quo ergo ſi ponatur $x = a$ prodibit deſcenſus tempus per MB, quod cum priore conſtantem quantitatem ab a liberam conficere debet. Si punctum M incidit in punctum B, i. e. ſi a euaneſcit, integrum tempus deſcenſus erit tempus deſcenſus per curuam BMA, quod ex ſuperiore formula euadit $= k$. Hanc ob rem etiam tempus deſcenſus per MBNA debet eſſe $= k$. Proinde tempus per MB debebit eſſe $= \alpha a + \beta a^2 + \gamma a^3 +$ etc. $+ \zeta V a + \eta a V a + \vartheta a^2 V a +$ etc.

§. 6. Hoc vt fiat aſſumo pro curua quaeſita ſequentem aequationem $ds = A\,dx V x + B x\,dx V x + C x^2 dx V x +$ etc. $+ E\,dx + F x\,dx + G x^2\,dx +$ etc. Tempus ergo deſcenſus per arcum MB erit $= \int \frac{A\,dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}} + \int \frac{B x\,dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}} + \int \frac{C x^2 dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}} +$ etc. $+ \int \frac{E\,dx}{\sqrt{(a-x)}} + \int \frac{F x\,dx}{\sqrt{(a-x)}} + \int \frac{G x^2 dx}{\sqrt{(a-x)}} +$ etc. ſcilicet ſi integralibus his ita ſumtis vt fiant $= 0$ ſi $x = 0$ ponatur vbique $x = a$. Determinentur ergo coefficientes A, B, C, etc. ita, vt ſint $\int \frac{A dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}} = \alpha a$; $\int \frac{B x dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}} = \beta a^2$, $\int \frac{C x^2 dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}} = \gamma a^3$ etc. et $\int \frac{E\,dx}{\sqrt{(a-x)}} = \zeta V a$; $\int \frac{F x dx}{\sqrt{(a-x)}} = \eta a V a$; $\int \frac{G x^2 dx}{\sqrt{(a-x)}} = \vartheta a^2 V a$ etc. Aſſumſi vero iſtum loco ds valorem, vt litterae A, B, C, etc. non ab a pendentes determinentur.

§. 7. Integratio huius $\frac{A\,dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$ pendet a quadratura circuli; At ſi ope logarithmorum imaginariorum integre-

tegretur vt decet, atque ponatur $x = a$ prodibit $\frac{1}{2}\mathrm{A}a\sqrt{-1}.l-1$ quod aequale esse debet αa sit ergo $\mathrm{A} = \frac{2.\alpha}{1.\sqrt{-1}.l-1}$. Simili modo, $\frac{\mathrm{B}xdx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$ integratum dabit $\frac{1.3}{2.4}\mathrm{B}.a^2\sqrt{-1}.l-1 = \mathfrak{G}a^2$, sit igitur $\mathrm{B} = \frac{2.4.\mathfrak{G}}{1.3\sqrt{-1}.l-1}$. Atque porro prodibit $\mathrm{C} = \frac{2.4.6.\gamma}{1.3.5.\sqrt{-1}.l-1}$, et $\mathrm{D} = \frac{2.4.6.8.\delta}{1.3.5.7.\sqrt{-1}.l-1}$ etc. Datis ergo $\alpha, \mathfrak{G}, \gamma, \delta$ etc. quae ex curua BNA nota inueniuntur, determinantur coefficientes pro curua quaesita A, B, C, D, etc.

§. 8. Pro altera parte, quae est rationalis, esse debet $\int \frac{\mathrm{E}dx}{\sqrt{(a-x)}} = \zeta\sqrt{a}$; sit autem $\int \frac{\mathrm{E}dx}{\sqrt{(a-x)}} = 2\mathrm{E}\sqrt{a}$, ex quo prodit $\mathrm{E} = \frac{\zeta}{2}$. Deinde $\int \frac{\mathrm{F}xdx}{\sqrt{(a-x)}}$ sit $= \frac{2}{3}.2\mathrm{F}a\sqrt{a}$, idque aequari debet huic $\eta a\sqrt{a}$, reperitur ergo $\mathrm{F} = \frac{3}{2}.\frac{\eta}{2}$, similiter proueniet $\mathrm{G} = \frac{3}{2}.\frac{5}{4}.\frac{\theta}{2}$; atque $\mathrm{H} = \frac{3.5.7.\iota}{2.4.6.2}$ et ita porro. Hac igitur ratione determinatis A, B, C, D, etc. cognita erit aequatio pro curua quaesita $ds = \mathrm{A}dx\sqrt{x} + \mathrm{B}xdx\sqrt{x} + \mathrm{C}x^2dx\sqrt{x} + \text{etc.} + \mathrm{E}dx + \mathrm{F}xdx + \mathrm{G}x^2dx + \text{etc.}$ Quae quanquam in infinitum plerumque continuetur, tamen fieri potest, vt saepe eius summa possit definiri, sicque inueniatur aequatio finita pro curua quaesita.

§. 9. Sit ANB linea recta ad horizontem inclinata ita vt sit $\mathrm{AN}:\mathrm{AQ} = n:1$ seu $r = nt$ et $dr = ndt$. Ex quo fit $\int \frac{dr}{\sqrt{(a+c-t)}} = \int \frac{ndt}{\sqrt{(a+c-t)}} = \text{Const.} - 2n\sqrt{(a+c-t)}$ Constans vero haec est $= 2n\sqrt{(a+c)}$ ponatur iam $t = c$ prodit tempus descensus per $\mathrm{BA} = 2n\sqrt{c} + \frac{1.2na}{2\sqrt{c}} - \frac{1.1.2na^2}{4.2c\sqrt{c}} + \frac{1.1.3.2na^3}{8.2.3.c^2\sqrt{c}} - \frac{1.1.3.5.2na^4}{16.2.3.4.c^3\sqrt{c}} + \text{etc.} - 2n\sqrt{a}$, in seriem $\sqrt{(a+c)}$ resoluta. Compa- Fig. 2.

retur

retur haec forma cum hac $k-\alpha a-\beta a^2-\gamma a^3-\delta a^4$ $-$etc. $-\zeta\sqrt{a}-\eta a\sqrt{a}-$etc. prodibit $k=2n\sqrt{c}$, $\alpha=\frac{-1\cdot 2n}{2\sqrt{c}}$, $\beta=\frac{1\cdot 1\cdot 2n}{4\cdot 2\cdot c\sqrt{c}}$, $\gamma=\frac{-1\cdot 1\cdot 3\cdot 2n}{8\cdot 2\cdot 3\cdot c^2\sqrt{c}}$, $\delta=\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 2n}{16\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot c^3\sqrt{c}}$, etc. et $\zeta=2n$, $\eta=0$, $\theta=0$, $\varkappa=0$ etc.

§. 10. Cognitis his valoribus prodibunt A, B, C, etc. vt ſequuntur. $A=\frac{-2n}{\sqrt{-c.l-1}}$, $B=\frac{2n}{3c\sqrt{-c.l-1}}$, $C=\frac{-2n}{5c^2\sqrt{-c.l-1}}$, $D=\frac{2n}{7c^3\sqrt{-c.l-1}}$ etc. $E=n$, $F=0$, $G=0$ etc. Pro curua igitur quaeſita BMC inuenitur iſta aequatio, $ds=\frac{-2ndx\sqrt{x}}{1.\sqrt{-c\,l-1}}+\frac{2nxdx\sqrt{x}}{3c\sqrt{-c.l-1}}-\frac{2nx^2dx\sqrt{x}}{5c^2\sqrt{-c.l-1}}+$ etc. $+ndx$, cuius integralis haec eſt $s=nx-\frac{4nx^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{-c.l-1}}$ $(\frac{1}{1.3}-\frac{x}{3.5c}+\frac{x^2}{5.7.c^2}-\frac{x^3}{7.9.c^3}+$ etc.). Facilius autem erit aequationem differentialem in expreſſionem finitam transmutare, eſt autem ea haec $ds=ndx-\frac{2ndx}{\sqrt{-c.l-1}}$ $(\sqrt{x}-\frac{x\sqrt{x}}{3c}+\frac{x^2\sqrt{x}}{5c^2}-\frac{x^3\sqrt{x}}{7c^3}+$ etc.). Quae ſeries exprimit arcum circuli, cuius tangens eſt $\sqrt{x}$ poſito radio $\sqrt{c}$, hanc ob rem erit $ds=ndx-\frac{ndx}{l-1}\,l\frac{\sqrt{c}+\sqrt{-x}}{\sqrt{c}-\sqrt{-x}}$.

§. 11. Aequatio haec inuenta $ds=ndx-\frac{ndx}{l-1}\,l\frac{\sqrt{c}+\sqrt{-x}}{\sqrt{c}-\sqrt{-x}}$ poteſt integrari, proditque poſt integrationem haec aequatio $s=nx-\frac{2n\sqrt{cx}}{\sqrt{-1}.l-1}-\frac{n(c+x)}{l-1}\,l\frac{\sqrt{c}+\sqrt{-x}}{\sqrt{c}-\sqrt{-x}}$. Hic ipſius s valor ope rectificationis circuli conſtruitur ſequente modo. Fig. 2. Fiat circuli quadrans cuius radius $AC=c$, ducatur tangens $AT=\sqrt{cx}$ et ſecans TMC, erit $s=\frac{n.AB.AT^2+n.AT.AC^2-n.AM.CT^2}{AC.AB}$. Namque ex natura circuli eſt $AB=\frac{cl-1}{2\sqrt{-1}}$ et $AM=\frac{c}{2\sqrt{-1}}\,l\frac{\sqrt{c}+\sqrt{-x}}{\sqrt{c}-\sqrt{-x}}$, vnde data conſtructio facile ſequitur.

§. 12.

§. 12. Ex aequatione $ds = ndx - \frac{ndx}{l-1} l \frac{\sqrt{c}+\sqrt{-x}}{\sqrt{c}-\sqrt{-x}}$ apparet esse $ds < ndx$ nisi in casu $x = o$, quo est $ds = ndx$: habebunt enim curuae AB et BC semper in B tangentem communem. Ex quo apparet curuam quaesitam esse concauam versus axem BP, atque eousque scilicet in C ascendere, quoad eius tangens fiat verticalis, in eoque puncto C curuam habere cuspidem. Altitudo igitur huius curuae BE inuenietur, si in aequatione ponatur $ds = dx$. In nostro ergo casu, quo curua data est linea recta, dabit x altitudinem BE ex aequatione $(n-1)l - 1 = n l \frac{\sqrt{c}+\sqrt{-x}}{\sqrt{c}-\sqrt{-x}}$ seu hac $-1 = \left(\frac{\sqrt{c}+\sqrt{-x}}{\sqrt{c}-\sqrt{-x}}\right)^{n-1}$ siue hac $(\sqrt{c}+\sqrt{-x})^{n-1} + (\sqrt{c} - \sqrt{-x})^{n-1} = o$. Vel etiam sumatur arcus $AM = \frac{n-1}{n}$ AB, et ducta eius tangente AT erit $\frac{AT^2}{AC}$ altitudo curuae quaesitae. Fig 1. Fig 2.

§. 13. Si aequatio differentialis inuenta denuo differentietur posito dx constante prodibit aequatio haec $ddx = \frac{ndx^2\sqrt{c}}{(c+x)\sqrt{-x}.l-1}$, quae posita ratione peripheriae ad diametrum $\pi : 1$ congruit cum hac $ddx = \frac{-\eta dx^2\sqrt{c}}{\pi(c+x)\sqrt{x}}$. Ex hac aquatione casus, quo $c = o$ et $n = \infty$, ita tamen, vt sit $n\sqrt{c} = \sqrt{b}$, facile cognoscitur. Euenit hoc, si recta data est infinite parua et angulum infinite paruum cum horizonte constituit, ita vt tempus descensus per eam tamen sit finitum nimirum $= 2\sqrt{b}$. Erit igitur $AM = AB$, ideoque tangens AT infinita respectu radii c, abibit ergo $c+x$ in x, atque curua quaesita hanc habebit aequationem $ddx = \frac{-dx^2\sqrt{b}}{\pi x\sqrt{x}}$ seu $ds = \frac{2dx\sqrt{b}}{\pi\sqrt{x}}$

atque $s = \frac{4bx}{\pi}$. Hanc ob rem curua quaesita erit cyclois, vt natura rei requirit.

§. 14. Si curua data hanc habuerit aequatione $dr = t^n dt$, erit elementum temporis $\frac{bt^n dt}{\sqrt{(a+c-t)}}$, ponatur $a+c=f$ et $f-t=zz$, erit $t=f-zz$ et $t^n = f^n - \frac{n}{1} f^{n-1} zz + \frac{n.n-1}{1.2} f^{n-2} z^4 - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} f^{n-3} z^6 +$ etc. et $\frac{bdt}{\sqrt{(f-t)}} = -2bdz$. Hinc prodibit $\int \frac{bt^n dt}{\sqrt{(a+c-t)}} =$ Const. $-2bf^n z + \frac{2bn}{1.3} f^{n-1} z^3 - \frac{2bn.n-1}{1.2.5} f^{n-2} z^5 + \frac{2bn.n-1}{1.2.} \frac{n-2}{3.7} f^{n-3} z^7 -$ etc. Quod cum facto $t=0$ seu $z = \sqrt{f}$ euanescere debeat, erit Const. $= 2bf^n \sqrt{f} (1 - \frac{n}{1.3} + \frac{n.n-1}{1.2.5} - \frac{n.n-1}{1.2.} \frac{n-2}{3.7} +$ etc.). Ponatur deinde $t=c$ seu $z = \sqrt{a}$, prodibit tempus descensus per $BA = 2b f^n \sqrt{f} (1 - \frac{n}{1.3} + \frac{n.n-1}{1.2.5} - \frac{n.n-1}{1.2.} \frac{n-2}{3.7} +$ etc.) $- 2b(f^n \sqrt{a} - \frac{n}{1.3} f^{n-1} a \sqrt{a} + \frac{n.n-1}{1.2.5} f^{n-2} a^2 \sqrt{a} -$ etc.)

§. 15. Ponamus breuitatis causa $1 - \frac{n}{1.3} + \frac{n.n-1}{1.2.5} -$ etc. $= p$, erit substituto $a+c$ loco f descensus per $BA = 2bpc^{n+\frac{1}{2}} + \frac{n+\frac{1}{2}}{1} 2bpc^{n-\frac{1}{2}} a + \frac{n+\frac{1}{2}.n-\frac{1}{2}}{1.2} 2bpc^{n-\frac{3}{2}} a^2 +$ etc. $- 2bc^n \sqrt{a} = \frac{2n}{3} . 2bc^{n-1} a \sqrt{a} - \frac{2n.2n-2}{3.5} 2bc^{n-2} a^2 \sqrt{a} - \frac{2n.2n-2}{3.5} . \frac{2n-4}{7} . 2bc^{n-3} a^3 \sqrt{a} -$ etcet. Haec forma comparata cum forma §. 4. dat $k - \alpha a - \beta a^2 - \gamma a^3 -$ etc. $- \zeta \sqrt{a} - \eta a \sqrt{a} - \theta a^2 \sqrt{a} -$ etc. erit $k = 2bpc^{n+\frac{1}{2}}$, $\alpha = -\frac{(n+\frac{1}{2})}{1} 2bpc^{n-\frac{1}{2}}$, $\beta = -\frac{(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})}{1.2} 2bpc^{n-\frac{3}{2}}$,

$2hpc^{n-\frac{3}{2}}$, $\gamma = -\frac{(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})}{1.2.3} 2hpc^{n-\frac{5}{2}}$ etc. atque $\zeta = 2hc^n$, $\eta = \frac{2n}{3}.2hc^{n-1}$, $\theta = \frac{2n.2n-2}{3.5}2hc^{n-2}$, $\iota = \frac{2n.2n-2.2n-4}{3.5.7}2hc^{n-3}$. etc.

§. 16. Inuenientur igitur litterae A, B, C, etc. vt sequitur $A = -\frac{2h(2n+1)pc^{n-\frac{1}{2}}}{\sqrt{-1}.l-1}$, atque $B = -\frac{2h(2n+1)(2n-1)pc^{n-\frac{3}{2}}}{1.3.\sqrt{-1}.l-1}$, $C = -\frac{2h(2n+1)(2n-1)(2n-3)pc^{n-\frac{5}{2}}}{1.3.5.\sqrt{-1}.l-1}$ etc. Atque $E = hc^n$, $F = \frac{hnc^{n-1}}{1}$, $G = \frac{h.n.(n-1)}{1.2.}c^{n-2}$, $H = \frac{h.n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}c^{n-3}$ etc. Pro curua itaque quaesita reperitur ista aequatio $ds = \frac{-2hpdx\sqrt{x}}{\sqrt{-1}.l-1}\left(\frac{2n+1}{1}c^{n-\frac{1}{2}} + \frac{(2n+1)(2n-1)}{1.3}c^{n-\frac{3}{2}}x + \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)}{1.3.5}c^{n-\frac{5}{2}}x^2 + \text{etc.}\right) + hdx\left(c^n + \frac{n}{1}c^{n-1}x + \frac{n.(n-1)}{1.2}c^{n-2}x^2 + \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}c^{n-3} + \text{etc.}\right) = h(c+x)^n dx - \frac{2hpc\,dx\sqrt{x}}{\sqrt{-1}.l-1}\left(\frac{2n+1}{1.\sqrt{c}} + \frac{(2n+1)(2n-1)x}{1.3.c\sqrt{c}} + \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)x^2}{1.3.5.c^2\sqrt{c}} + \text{etc.}\right)$

§. 17. Quanquam hic pro curua data haec tantum aequatio $dr = bt^n dt$ est assumta, tamen ad omnes prorsus curuas exemplum hoc accommodari potest. Sit enim curua data ista expositа aequatione $dr = At^\alpha dt + Bt^\beta dt + Ct^\gamma dt +$ etc. Tum quaeratur aequatio pro curua quaesita primo ex hac tantum aequatione $dr = At^\alpha dt$, et sit aequatio resultans $ds = Pdx$. Deinde sumatur aequatio $dr = Bt^\beta dt$ proueniatque aequatio $ds = Qdx$. Similiter ex aequationibus $dr = Ct^\gamma dt$,

$dr = Dt^{\delta}\,dt$ etc. emergant iſtae $ds = R\,dx$, $ds = S\,dx$ etc. erit aequatio pro curua quaeſita haec $ds = (P + Q + R + S + \text{etc.})\,dx$, ſi ſcilicet curua data habuerit aequationem $dr = At^{\alpha}\,dt + Bt^{\epsilon}\,dt + \text{etc.}$

§. 18. Apparet etiam ex aequatione §. 16. ſi fuerit $n = -\frac{1}{2}$ vel $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ etc. ſeriem abrumpi, atque ſtatim haberi aequationem finitam; ſit $dr = ht^{-\frac{1}{2}}$, curua ſcilicet data cyclois, erit $n = -\frac{1}{2}$ atque $ds = \frac{b\,dx}{\sqrt{(c+x)}}$ Ex quo cognoſcitur curuam ſuperiorem annexam cum data inferiore eandem curuam continuam nimirum cycloidem conſtituere.

DE SVPERFICIEBVS AD AEQVATIONES LOCALES REVOCATIS, VARIISQVE EARVM AFFECTIONIBVS.

AVTHORE

Iacobo Hermanno.

Tabula IV.

GEometrae de aliis Superficiebus quam de planis, aut etiam de his quae ex reuolutione figurae cuiusque curuilineae circa lineam quandam in gyrum actae, vix cogitarunt ſubinde; tametſi infinities infinita genera dantur, ad quae ſpecies illae reuocari non poſſunt. Aequationes locales, quibus omnium ſuperficierum indoles exponi debet, tres omnino indeterminatas inuoluunt, cum tamen aequationes ad lineas curuas

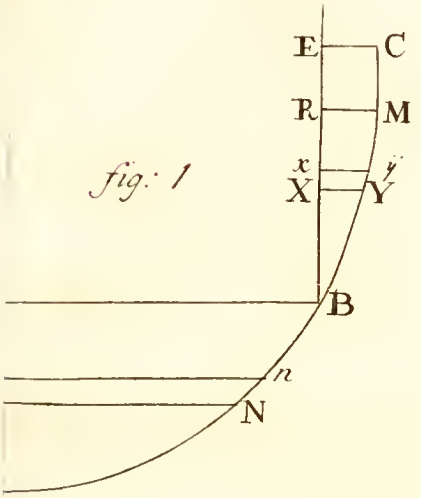


fig: 1

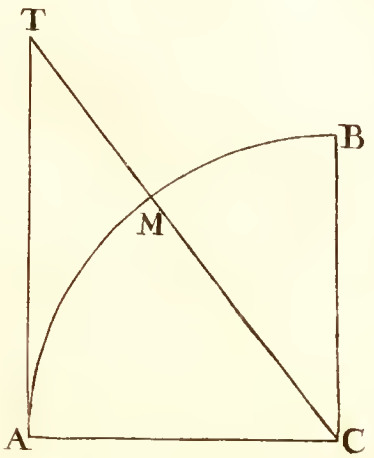
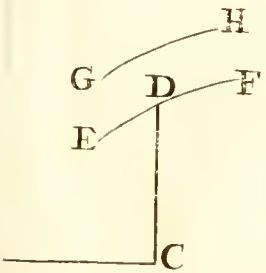


fig: 2



Y fig: 3

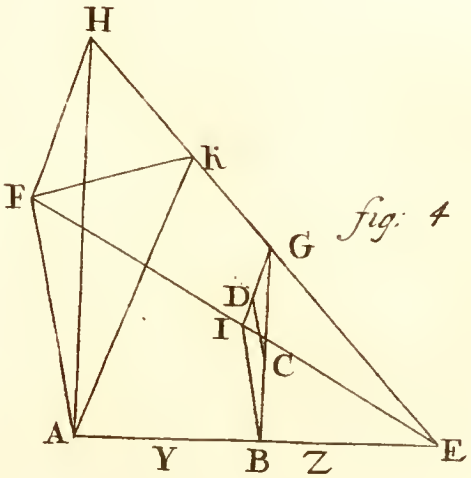


fig: 4

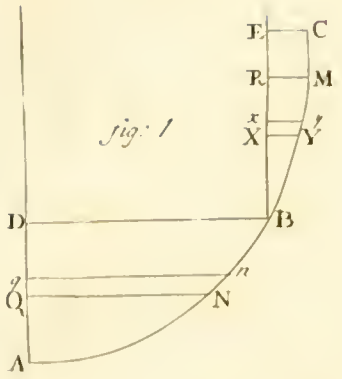


fig: 1

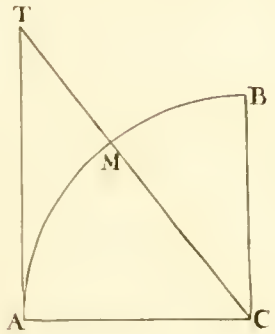


fig: 2

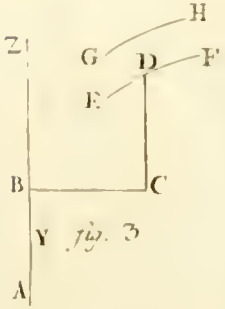


fig. 3

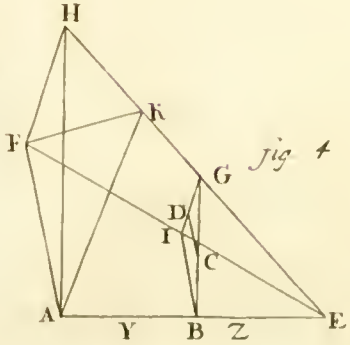


fig 4

curuas in plano ductas ordinarie duas tantum indeterminatas, coordinatas nempe curuae, complectantur. Acceſſio vero tertiae indeterminatae ad duas illas, quae figuris quibusuis ſufficiunt, calculum ſaepe prolixum efficit. Et haec calculi prolixitas probabilis cauſa eſt, propter quam Geometrae a contemplatione nouorum generum ſuperficierum animum abſtinuerunt.

In iis vero quae ſequentur, nonnullas ſuperficies quatenus aequationibus localibus exprimi poſſunt, contemplabimur, earumque aequationes quae ſeſe primum nobis fortuito obtulerunt excutiemus, oſtenſuri quomodo Maximae aut Minimae applicatae inter ſuperficies illas et ſubiectum aliquod planum duci, tum etiam plana ſuperficies tangentia inueniri, aut quomodo in ſuperficie ipſa inter duo data puncta linea breuiſſima determinari debeat.

I. Si ſuperficies quaecunque gibba vel cana EGFH ſuper plano horizontali YCZ, extet, et in hoc plano horizontali ducta ſit pro lubitu recta indefinita YZ, hanc poſthac *directricem* vocabimus, eum in finem, vt ex quolibet ſuperficiei puncto D, demiſſa perpendiculari DC, et alia CB ex C in directricem YZ, natura ſuperficiei exponi poſſit per aequationem, quae relationem, quas indeterminatae $AB = x$, $BC = y$, et $CD = z$, inter ſe ſeruant, indicat. Ad id autem punctum quoddam fixum A in directrice aſſumi debet, à quo abſciſſae initium ducant. Caeterum Directrix et in ea punctum fixum A pro lubitu poni poſſunt prout magis Fig. 3.

gis commodum videbitur. Tres illae indeterminatae z, y, et x, in aequationes locales semper ingrediuntur, paucis exceptis casibus, cum superficei natura non pendet ab indeterminata illa quae in aequatione superficiei abest. Sed sepositis exceptionibus illis, dispiciendum quomodo aequationes locales tres indeterminatas inuoluentes tractari debeant. Assumamus primum aliquot ex simplicissimis earum, sintque adeo aequationes examinandae eae quae sequuntur.

I. $az+by+cx-e^2=0$. III. $z^2-xy=0$.
II. $z^2-ax-by=0$. IV. $z^2-ax^2-bx-cy^2-ex-fy=0$
V. $az^2+byz+cy^2-exz+fx^2+gz-bx=0$.
VI. $u^2-y^2-x^2=0$.

Aequatio I. $az+by+cx-e^2=0$.

II. Haec aequatio est Locus plani, cuius positio ex aequatione est indicanda. Ad id ponamus primum $y=0$, et $x=0$, remanebit aequatio $az-e^2=0$, quae praebet $z=\frac{e^2}{a}$. Hinc si in puncto fixo A ad horizontis planum perpendicularis AF excitetur $=\frac{e^2}{a}$, erit punctum F in plano optato. Faciendo deinde in eadem aequatione $z=0$, $y=0$, remanebit $cx-e^2=0$, quae dat $x=\frac{e^2}{c}$. Capiendo ergo in directrice YZ, partem $AE=\frac{e^2}{c}$, punctum E erit aliud punctum in plano quaesito. Tertio factis $z=0$, et $x=0$, inuenietur $by-e^2=0$, atque adeo $y=\frac{e^2}{b}$, quare ducendo AH perpendicularem ad AE et $=\frac{e^2}{b}$, punctum H dabit tertium punctum in plano quaesito; propterea pla-

Fig. 4.

num

num, quod per tria puncta F, E, H transit, eſt locus aequationis propoſitae $az+by+cx-e^2=0$.

Per quoduis punctum D plani FHE planum IGB transire intelligatur plano FHA parallelum, eritque DC horizonti normalis in plano IGB et parallela ipſis IB et FA. Dicantur $AB=x$, $BC=y$, et $CD=z$. Triangula ſimilia EAH, EBG, praebebunt $BG=\frac{e^2-cx}{b}$ adeoque $CG=\frac{e^2-cx-by}{b}$, et Triangula ſimilia FAH, DCG, dant $DC=\frac{e^2-cx-bx}{a}=z$, atque adeo $az+by+cx-e^2=0$. Q. E. I.

Eſt ergo HE ſectio plani inclinati FHE et horizontis, ductoque per FA plano FKA quod rectae EH ad angulos rectos occurrat, angulus FKA indicabit inclinationem horum planorum alterius ad alterum, et ſinus huius anguli inuenietur eſſe ad ſinum totum, vt $\sqrt{(b^2+c^2)}$ ad $\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}$.

III. Si indeterminatae, quae in aequationem poſitionem plani FHE indicantem ingrediuntur, non in ſubiecto horizontis AHE plano iaceant, ſed in plano inclinato FHE: vt, ſi $FI=t$, $ID=u$, erunt $x=\frac{e^2t}{cf}$ $y=\frac{e^2u}{bg}$, exiſtentibus $FE=f$, et $FH=g$; Quibus in $z=\frac{e^2-cx-by}{a}$ ſuffectis, prouenit $z=\frac{(fg-gt-fu)e^2}{afg}$. Hoc vſum ſinum aliquando habere poteſt, cum figura ex plano horizontali proiici debet in planum FHE, aut viciſſim.

IV. Ex conſideratione ſola Pyramidis EAFH omnia problemata, quae circa triangula ſphaerica rectangula Fig. 4.

ctangula occurrunt expediri poſſunt. Vertex enim E refert centrum Sphaerae, anguli FEA, HEA bina crura circa angulum rectum, et angulus HEF hypothenuſam, angulus vero rectus eſt, quem plana FAE, HAE continent, et reliqui anguli ſunt, qui planis AHE,FHE, et AFE, HFE intercipiuntur. His poſitis:

1. Si ex datis duobus cruribus circa angulum rectum, id eſt, datis angulis FEA, HEA inuenire oporteat angulum K alteri cruri vel angulo HEA adiacentem, res ſine vllo ad Sphaeram reſpectu, facillima eſt. Nam in Δ^{to} AKE ad K rectangulo, eſt AK. AE:: ſin. AEK. ſin. tot., et in Δ^{to}. rectangulo FAE habetur, AE. AF:: ſin. tot., tang. AEF, quare ex aequo AK. AF:: ſin. tot.. tang. K:: ſin. AEK. tang. AEF. Hinc conficitur: *Vt ſinus cruris ang. quaeſito adiacentis, ad ſin. tot., ita tang. cruris alterius, ad tang. anguli quaeſiti.*

2. Si datis crure FEA et hypothenuſa FEH inuenire oportet angulum cruri oppoſitum K. Bina $\Delta\Delta$ AKE et FEK ſubminiſtrant hanc regulam ſeu analogiam, *vt tang. hypothenuſae ad tang. cruris dati, ita ſin. tot., ad Coſin. anguli quaeſiti* K.

3. Si datis hypothenuſa FEH et angulo K quaerantur crura AEH et AEF. Idem par triangulorum FEK et AEK ſuppeditat has duas analogias in quaeſtionis ſolutionem, nempe: *Vt ſin. tot. ad coſin. ang dati, ita tang. hypothenuſae, ad tang. cruris dato angulo adiacentis*: deinde *vt ſin. tot. ad ſin. ang. dati, ita ſin. hypothenuſae ad ſin. cruris dato angulo oppoſiti.*

Reli-

Reliqua problemata triangulorum rectangulorum ex hisce facile quoque soluuntur.

V. Quod ad Triangula Sphaerica obliquangula attinet, eadem Pyramis eorum resolutioni inseruit, modo angulus FAH iam sit obliquus, manentibus tamen angulis FAE, HAE, rectis. Quod vnico exemplo ex difficilioribus ostendam; nempe cum datis angulis FEA, HEA, HEF, quaeritur angulus FAH, quem plana FAE, HAE comprehendunt; quod in Trigonometria Sphaerica redit ad illud, vt ex datis tribus lateribus trianguli inueniantur anguli. Fig. 4.

Dicantur nunc $AF=a$, $AH=b$, $AE=c$, $EF=e$, $EH=f$, cosinus anguli dati $FEH=g$, et cosinus anguli quaesiti $FAH=u$, inuenietur in Δ^{lo}. FAH latus $FH=V(a^2+b^2-2abu)$, et in Δ^{lo}. FEH, idem latus reperitur, $=V(a^2+b^2+2c^2-2efg)$, quare $a^2+b^2-2abu=a^2+b^2+2c^2-2efg$, ex qua deriuatur $u=\frac{efg-c^2}{ab}$. Dicantur praeterea sinus angulorum FEA, HEA, l et m, eorum cosinus λ, μ, et sinus totus 1, erunt $a=el$, $b=fm$, $c-e\lambda=f\mu$, quibus in $u=\frac{efg-c^2}{ab}$ suffectis, reperitur $u=\frac{g-\lambda\mu}{lm}$. Sit praeterea sinus dimidii anguli quaesiti $FAH=s$, erit $u=1-2s^2$, et $s^2=\frac{lm+\lambda\mu-g}{2lm}$ quod si praeterea sit sin. $(\frac{1}{2}AEF+\frac{1}{2}FEH+\frac{1}{2}AEH-AEF)=p$, et sin. $(\frac{1}{2}AEF+\frac{1}{2}FEH+\frac{1}{2}AEH-AEK)=q$, per generales sinuum proprietates inuenietur $lm+\lambda\mu-g=2pq$, quod in praecedenti aequatione surrogatum, praebet $s^2=\frac{pq}{lm}$. Atque sic inopinatò incidi-

mus in pulcerrimam regulam ab aliis iam paſſim traditam ſoluendi triangulum quodcunque ſphaericum, datis tribus eius lateribus, ita vt non neceſſe ſit ducta perpendiculari triangulum propoſitum in duo triangula rectangula diuidere.

Atque pauca haec ſufficiunt ad oſtendendum, quomodo ex conſideratione Pyramidis vniuerſa Trigonometria Sphaerica, absque vlla ad Sphaeram attentione, tradi poſſit.

Aequatio II. $z^2 - ax - by = 0$.

Tab. V. Fig. 1.

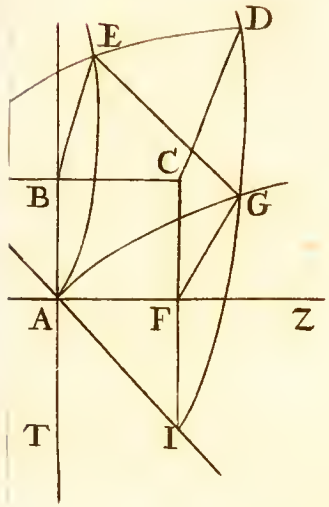
VI. Haec aequatio inuenietur eſſe ad ſuperficiem cunei Parabolico Cylindrici.

1. Nam ſi $z = 0$, habemus $-ax - by = 0$, quae aequatio eſt locus lineae rectae ita conſtruendae: Sit VT directrix, et punctum A origo abſciſſarum x, ducatur recta indefinita HAI hac lege, vt vbique AB ſit ad BH, vt b ad a. Haec recta HAI communis erit ſectio ſuperficiei et horizontis.

2. Si $y = 0$, ſuperficiei aequatio praebet $z^2 = ax$, Parabolae aequationem, quare ſectio verticalis ſolidi per directricem BAE eſt parabola parametrum habens $= a$.

3. Si $x = 0$, ſuperficiei aequatio abit in $z^2 = by$, quae eſt alius parabolae aequatio, quo cognoſcitur quod ſectio AGF cum horizonti tum directrici VT ad normam inſiſtens quoque ſit Parabola, ſed cuius Parameter $= b$.

4. Omnis ſectio BEDC plano AGF parallela eſt Parabolae portio, cuius parabolae vertex eſt in H, et quae



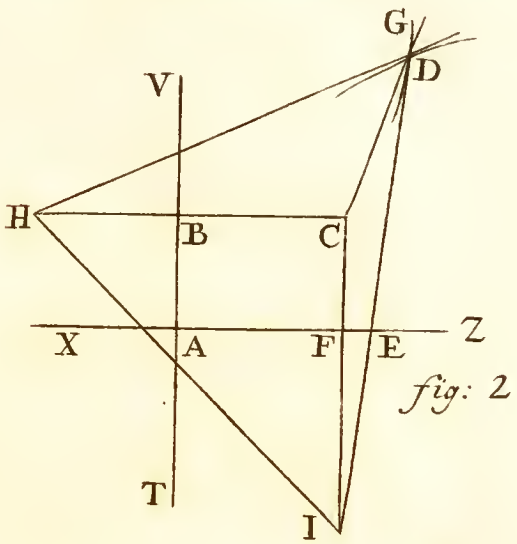
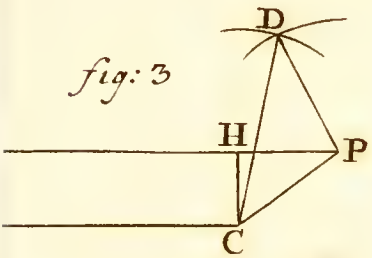


fig: 2

fig: 3



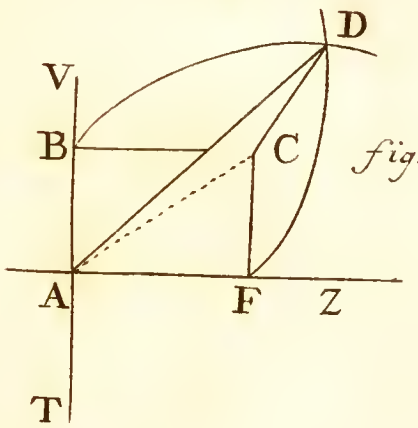


fig: 4

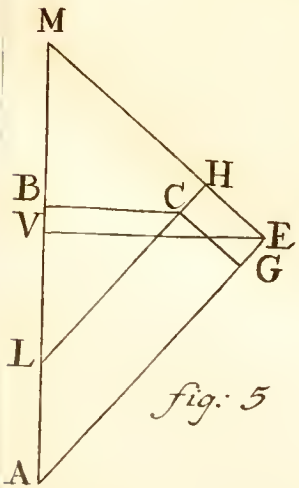
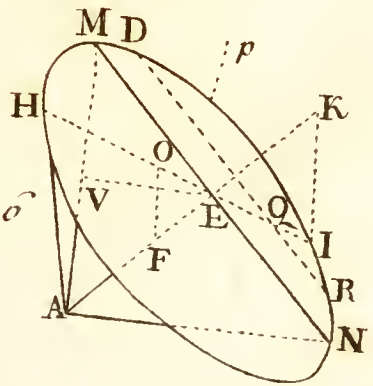


fig: 5

fig: 6



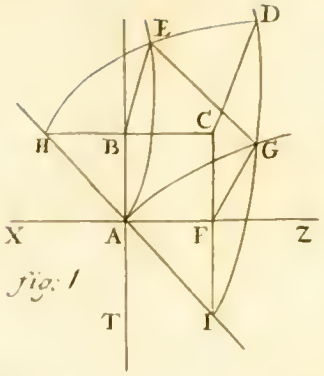


fig: 1

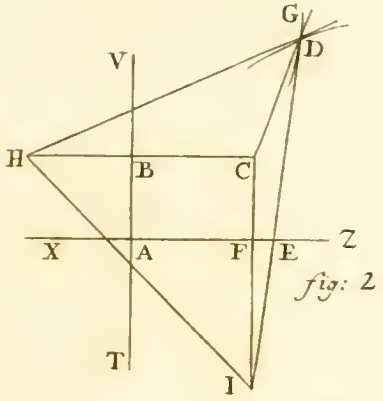


fig: 2

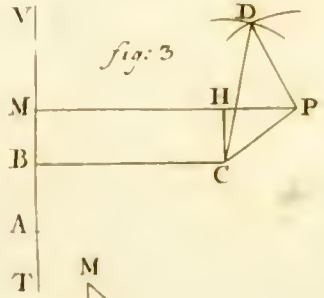


fig: 3

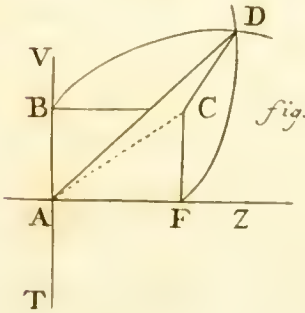


fig: 4

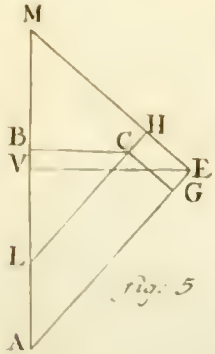


fig: 5

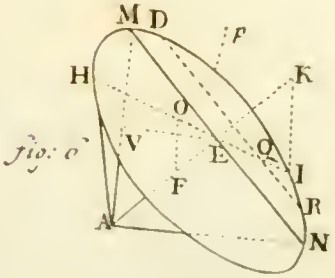


fig: 6

parametrum habet $= b$. Item omnis sectio FCDG plano ABE parallela est portio Parabolae, cuius vertex est in eadem recta HA nempe in I, cuiusque parameter $= a$.

5. Omnis sectio solidi per planum horizonti parallelum est linea recta parallela lineae HAI atque ex hoc cognoscitur, quod solidum EEACDGA sit Cuneus parabolico Cylindricus, nempe basin habens parabolicam, cuius parameter $= V(a^2 + b^2)$ et planum tum rectae HI tum horizonti perpendiculare sit, et per punctum A transeat.

VII. Si in superficie AD maxima applicata, si quam habet, indagari debeat, sequenti modo procedendum erit. Differentiata aequatione superficiei positis primum z et y manentibus orta inde aequatio postquam per dx diuisa fuerit, signetur A.

Differentiata deinde eadem aequatione superficiei positis z et x inuariatis, orta post diuisionem per dy, aequatio signetur B. Ope aequationum A et B elicientur aestimationes indeterminatarum x, et y per quantitates datas, vel per tales et tertiam z, quibus in aequatione superficiei surrogatis, orietur noua aequatio magnitudinem ordinatae maximae aut minimae z definiens. Sed si aequationes A, B nullam indeterminatam inuoluunt, indicio est, superficiem propositam nullam maximam minimamue capere.

Si iam aequationem $z^2 - ax - by = 0$, iuxta praecepta modo tradita tractemus, inuenientur aequationes A.. $a = 0$, et B.. $b = 0$, quae cum nullam indetermina-

tam inuoluant, concluditur ſuperficiem nullam maximam, minimamue applicatam z admittere.

Fig. 2. VIII. Quantum ad plana tangentia attinet per data in quibusuis ſuperficiebus puncta, quarum aequationes datae ſunt, ducenda: methodus huc faciens, ita habet. Ducatur primum tangens curuae ED, quae eſt ſectio ſuperficiei ad horizontem recta et directrici normalis; ſit haec tangens DH, et ſubtangens CH. Poſtea ducatur tangens DI ad curuam GD, quae eſt communis ſectio plani ſecantis horizonti normalis et paralli directrici, ipſiusque ſuperficiei curuae; et planum per duas tangentes DH et DI transiens, ſuperficiem in D continget.

Praxis autem haec eſt: Differentietur aequatio ſuperficiei $z^2 = ax + by$, poſita primum x manente, erit $2zdz = bdy$, quare $CH\left(= \frac{zdy}{dz}\right) = \frac{2z^2}{b} = \frac{2ax+2by}{b}$. Differentietur porro eadem aequatio ſed poſita y manenti, fiet $2zdz = adx$, et $CI\left(= \frac{zdx}{dz}\right) = \frac{2z^2}{a} = \frac{2ax+2by}{a}$. Inuentis vero CH et CI reliqua facile expedientur. Nam ſubtangens parabolae HED pertinens ad punctum D eſt $= 2CH$, et ſubtangens Parabolae EGD in eodem puncto D eſt $2CI$, quare communis ſectio plani tangentis et horizontis fiet parallela lineae HI, et ipſum planum ſuperficiem non modo in puncto D, ſed in tota linea recta quae in ſuperficie cylindrica duci poteſt eidem HI parallela, continget.

Inuen-

Inuento plano tangente facile eſt ſuperficiei in D perpendicularem ducere, alio enim opus non eſt quam vt in puncto contactus D plano tangente perpendicularis ducatur. Saepe tamen praeſtat per methodum directam ducere perpendiculares ad ſuperficies, absque praeſuppoſita notitia modi ducendi plana tangentia.

IX. Hic modus directus duobus verbis exponi poteſt. Perpendicularis enim ad ſuperficiem eſt breuiſſima diſtantia inter punctum horizontis, in quo perpendicularis ipſi occurrit et ſuperficiem propoſitam. Hanc ob cauſam perpendicularis in quacunque ſuperficie per methodum de maximis ſeu minimis inueſtigari poteſt. Sit ergo P punctum illud in plano horizontis ex quo breuiſſimam lineam ad ſuperficiem ducere oportet, ex quo perpendicularis PM in directricem VT demiſſa ſit. Deinde ex puncto D ſuperficiei etiam demiſſa ſit DC orthogonaliter in horizontem, ductisque ex C duabus CB et CN, hac ad VT, illa vero ad PM parallelis, dicantur $CN = BM = m$, $NP = n$, $DC = z$, et $PD = p$, inuenietur $p = V(m^2 + n^2 + z^2)$, quae *minima* eſſe debet. Quare differentiando aequationem $p^2 = m^2 + n^2 + z^2$, poſita primum m conſtanti, fit $n\,dn + z\,dz = p\,dp = o$, vel propter $MP = y + n$ inuariatam neceſſe eſt, vt ſit $dy + dn = o$, vel $dn = -dy$, $-n\,dy + z\,dz = o$, adeoque $n = \frac{z\,dz}{dy}$. Sed aequatio ſuperficiei $z^2 = ax + by$, cum x manens eſt, praebet $2\,z\,dz = b\,dy$, adeoque $\frac{2\,dz}{dy} = \frac{1}{2}b$, quare $n = \frac{1}{2}b$. Fig. 3.

Similiter differentiata $p^2 = m^2 + n^2 + z^2$ poſita n conſtanti praebet $m\,dm + z\,dz = p\,dp = o$, et quia AM

$= x + m$, inuariata manet, fit $dm = -dx$, adeoque $-m\,dx + z\,dz = o$, et $m = \frac{z\,dz}{dx}$. Aequatio vero $z^2 = ax + by$, in qua nunc y inuariata maneat, differentiata ſuppeditat $2\,z\,dz = a\,dx$, et $\frac{z\,dz}{dx} = \frac{1}{2}a$, conſequenter habemus $m = \frac{z\,dz}{dx} = \frac{1}{2}a$. Ad ducendum igitur perpendicularem DP ſequens eſt conſtructio: In recta CN parallela VT capiatur internallum $CV = \frac{1}{2}a$, ductaque NP parallela BC capiatur internallum $NB = \frac{1}{2}b$, recta DB iungens punctum datum D ſuperficiei et inuentum punctum P in plano horizontis ſuperficiei propoſitae ad angulos rectos occurret, et minima erit omnium carum quae ex puncto P ad ſuperficiem duci poſſunt.

Aequatio III. $z^2 - xy = o$.

X. Haec aequatio praeter monem ſpem et opinionem oſtendetur eſſe ad Conum. Factis enim $x = mt$, et $y = nt$, in quibus m et n ſunt magnitudines inuariabiles, dum t eſt variabilis, et ſuffectis hisce in aequatione, proueniet $z^2 = mnt^2$, et $z = t\sqrt{mn}$, quae eſt aequatio ad lineam rectum, docens, quod communis ſectio plani cuiusque ad horizontem recti, et ſuperficiei ipſius, ſit linea recta, nempe cum planum ſecans per originem abſciſſarum x, id eſt, per punctum A transit, ex quo omnino ſequitur quod ſuperficies illa ſit Conica verticem in puncto A, habens. Ducatur praeterea AZ directrici VT normalis et inuenietur quod omnis ſectio
Fig. 4. ipſi AZ parallela, qualis eſt BCD ſit Parabola verticem habens in recta VA et parametrum $= AB$. Item quod

quod omnis ſectio FCD directrici VT parallela ſit alia Parabola verticem in recta AZ et parametrum $=AF$ habens. Sed ex hisce nondum cognoſcitur qualis ſit Conus cuius ſuperficies propoſita aequatione exponitur. Indaganda eſt ergo baſis huius Coni. Hunc in finem ſit VA directrix, MH linea per quam transit baſis Coni ad horizontem inclinata angulo, cuius ſinus eſt ad ſinum totum vt r ad 1. Ducatur ex origine abſciſſarum A, recta AE perpendicularis ad MH Sit punctum C proiectio puncti D ſuperficiei in planum horizontis, et ducatur per C recta HL parallela EA, et CB perpendicularis ad MV. Dicantur $AV=a$, $VE=b$, $AE=c$, indeterminatae $AB=x$, $BC=y$, $HE=u$, $CH=st$, vbi $s=\sqrt{(1-r^2)}$; erit $z=rt$, nam indeterminatae t et u ſunt coordinatae in plano inclinato ſitae. Similitudo vero $\Delta\Delta^{rum}$. AME et LBC ſuppeditat $y=-\frac{au}{c}-\frac{bst}{c}+b$, et $x=+\frac{bu}{c}-\frac{ast}{c}+a$, quibus in aequatione $xy-z^2=o$, ſuffectis, et rt pro z, reſultabit $\underbrace{\frac{-abu^2}{c^2}}_{\frac{-b^2s}{c^2}}+\underbrace{\frac{a^2s}{c^2}tu}+\underbrace{\frac{abs^2}{c^2}t^2}_{\frac{-c^2r^2}{c^2}}-\frac{2abst}{c}+ab=o$, vt haec aequatio fiat Circuli aequatio, cuius circuli diameter in planum horizontis proiecta coincidat cum AE, pono $a^2s-b^2s=o$, adeoque $a=b$, adeoque $c=a\sqrt{2}$, deinde $abs^2-c^2r^2=-ab$, quod propter $a=b$, praebet $s^2-2r^2=-1$, et $r^2=\frac{2}{3}$, $s^2=\frac{1}{3}$, quare praecedens aequatio abit in $-\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}t^2-\frac{2ast}{\sqrt{2}}+a^2=o$, vel $u^2=-t^2-2at\sqrt{\frac{2}{3}}+2a^2$, quae ſequenti modo conſtruitur: In fig. 6. capiatur $AV=VM=VE=a$, iungatur ME et producatur in N vsque dum ſic $EN=EM=AE$. Fig. 5. Fig. 6.

$= AE = a\sqrt{2}$, erigatur deinceps AH ad angulos rectos ſuper plano horizontis, et fiat $= 2a$, iungatur HE et in hac ſitum erit centrum circuli, ſit $EO = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, erit O centrum quaeſitum, et $OH = OM = ON = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, radius circuli, et pars coni MHAN eminens ſupra planum horizontis eſt locus aequationis $z^2 - xy = 0$.

Nam ſi in aequatione baſis coni $+u^2 + t^2 + 2atV\frac{2}{3} - 2a^2 = 0$, pro t ſufficiatur $-yV\frac{3}{2} - xV\frac{3}{2} + aV6$, et pro u quantitas $-yV\frac{1}{2} + xV\frac{1}{2}$, quae ex aequationibus $y = \frac{-au}{c} - \frac{bst}{c} + b$, et $x = \frac{+bu}{c} - \frac{ast}{c} + a$, factis in iisdem $b = a$, $c = aV2$, et $s = V\frac{1}{3}$ deriuatae ſunt, et pro t^2, u^2 quantitatum illarum quadrata, proueniet aequatio, quae per 2 diuiſa praebebit $-y^2 + xy - x^2 + 4ay + 4ax - 4a^2 = 0$.. A. Deinde $z^2 (= r^2 - t^2) = \frac{2}{3}t^2$, producit $y^2 + x^2 - 4ay - 4ax + 4a^2 - z^2 = 0$.. B. Additis vero aequationibus A et B, reſultat omnino $xy - z^2 = 0$, vel $z^2 - xy = 0$. Q. E. D.

Aequatio IV. $z^2 - ax^2 - bxy - cy^2 - cx - fy = 0$.

XI. Haec aequatio eſt ad ſuperficiem alicuius Conoidis, cuius baſis exponitur aequatione $cy^2 + bxy + ax^2 + fy + gx = 0$, quae pro diuerſo habitu coefficientum, ad ſingulas ſectiones conicas ſpectat. Altitudo conoidis ſupra planum horizontis eſt $= V\left(\frac{af^2 - bef + ce^2}{b^2 - 4ac}\right)$.

Altitudo iſta inuenitur per methodum de Maximis et Minimis ſupra §. VII. expoſitam. Nam differentiata aequatione propoſita, poſitis z et y manentibus,

bus, oritur $2ax+by+e=0$. . A. Postea eadem aequatione differentiata, cum z et x manentes sunt, prouenit $2cy+bx+f=0$. . B. Ex binis vero aequationibus A et B eliciuntur $x=\frac{2ce-bf}{b^2-4ac}$, $y=\frac{2af-be}{b^2-4ac}$, quibus in aequatione proposita surrogatis inuenietur Maxima applicata $z=V(\frac{af^2-bef+ce^2}{b^2-4ac})$.

XII. Idem per communem Algebram quoque inueniri potest: aequatio enim quae propositae aequipollet $cy^2=-bxy-ax^2-fy-ex+z^2$, duas radices habet, nempe

$2cy=-bx-f+V(\overline{b^2-4ac}.x^2+\overline{2bf-4ce}.x+f^2+4cz^2)$.
$2cy=-bx-f-V(\overline{b^2-4ac}.x^2+\overline{2bf-4ce}.x+f^2+4cz^2)$.

In casu Maximi hae radices, quae generaliter inaequales sunt, aequales fieri debent, quare fiunt $2cy=-bx-f$, vel $y=\frac{-bx-f}{2c}$, et $\overline{b^2-4ac}.x^2+\overline{2bf-4ce}.x+f^2+4z^2=0$, ista vero etiam duas radices habet,

$(b^2-4ac)x=2ce-bf+V(4acf^2-4bcef+4c^2e^2-\overline{b^2+4ac}.4cz^2)$.
$(b^2-4ac)x=2ce-bf-V(4acf^2-4bcef+4c^2e^2-\overline{b^2+4ac}.4cz^2)$.

Aequalitas harum radicum praebet $x=\frac{2ce-bf}{b^2-4ac}$, $y(=\frac{-bx-f}{2c}=\frac{2af-be}{b^2-4ac}$, et $4acf^2-4bcef+4c^2e^2-b^2+4ac.4cz^2=0$, et haec vltima definit in $z^2=\frac{af^2-bef+ce^2}{b^2-4ac}$, et $z=V(\frac{af^2-bef+ce^2}{b^2-4ac})$, prorsus vt ante.

Positio plani superficiem in quolibet eius puncto D tangentis, per methodum §. VIII. traditam inuenietur, si in Tab. V. Fig. 2. huic exemplo applicata ca-

piatur $CH\left(=\frac{zdy}{dz}\right)=\frac{2z^2}{bx+2cy+f}$, et $CI\left(=\frac{zdx}{dz}\right)=\frac{2z^2}{2ax+by+e}$, et per binas rectas DH, DI suas respectivas curuas tangentes planum transire intelligatur, planum istud superficiem in puncto dato D continget.

Aquatio V. $az^2+byz+cy^2-exz+fx^2+gz-bx=0$.

XIII. Haec aequatio est superficiei conoidis Elliptici vel subinde etiam Coni Elliptici. Nam facta $z=0$, aequatio remanens $cy^2+fx^2-bx=0$ est aequatio basis Conoidis, quam apparet esse Ellipsin, cuius axis transuersus $=\frac{b}{f}$, et eius coniugatus $=\frac{b}{\sqrt{cf}}$.

Vertex Conoidis inuenitur vt in exemplo § praecedentis, aequationes vero A et B in praesenti exemplo sunt A..$bz+2cy=0$, et B..$ez-2fx+b=0$, et substitutis aestimationibus hisce elicitis, proueniet $(bf^2-4acf+ce^2)z^2=(4cfg-2ceb)z-cb^2$, aequatio magnitudinem maximae applicatae z definiens.

Tabula VI. Fig. 1.

Porro circa directricem AZ descripta sit Ellipsis AFG, in qua AG, in qua $AG=\frac{b}{f}$; Sit $VP=k=$ maximae applicatae z, atque adeo V vertex Conoidis, demissaque normali BZ in directricem quantum opus est productam, dicantur $AZ=l$, et $PZ=m$. Substitutisque in aequationibus supra inuentis A et B, pro z, x et y, litteris k, l, et m, inuenientur $b=\frac{2cm}{k}$, vbi signum primatium denotat punctum P situm esse in opposita parte directricis intuitu puncti F, et $e=\frac{2fl-b}{k}$ tertia vero aequatio $(bf^2-4acf+ce^2)z^2=$ etc. praebet $g=\frac{cm^2-afk^2+lfk^2}{fk}$. Videa-

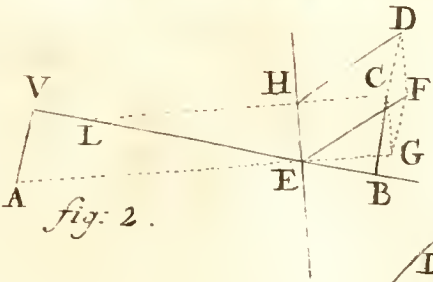


fig: 2.

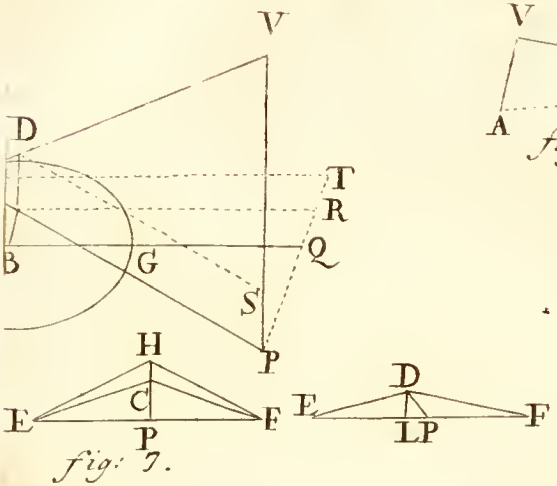


fig: 7.

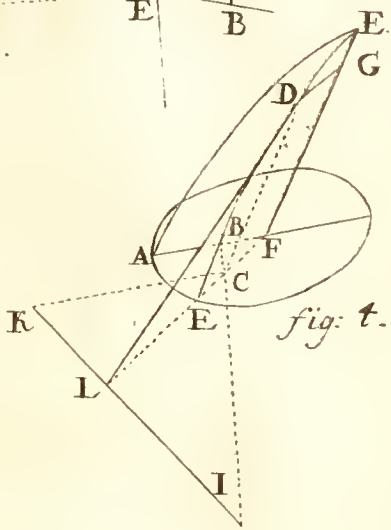
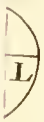


fig: 4.

fig: 3.



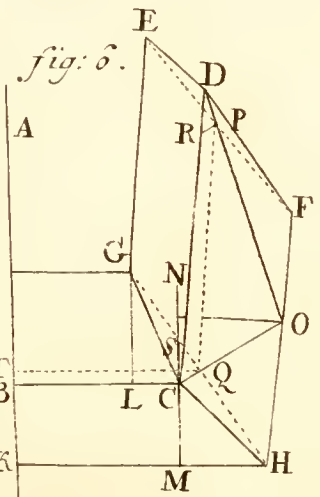


fig: 6.

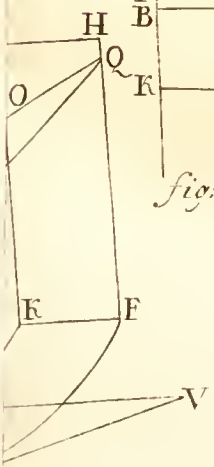


fig: 5.

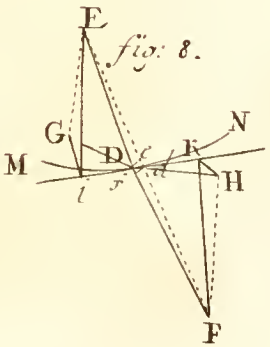


fig: 8.

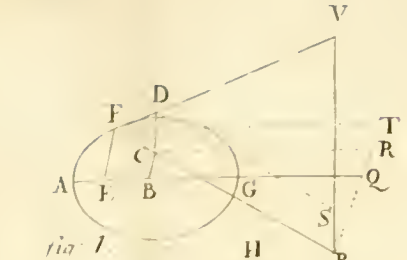


fig. 1.

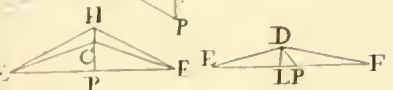


fig. 2.

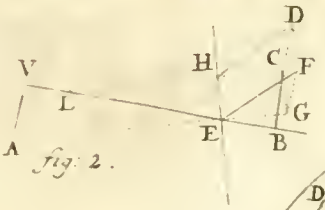


fig. 3.

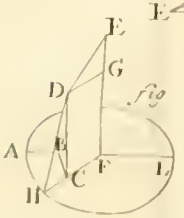


fig. 4.

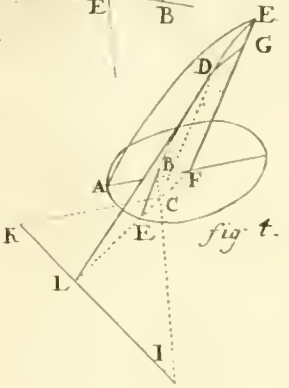


fig. 5.

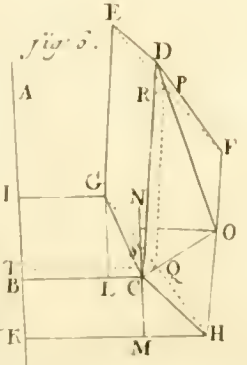
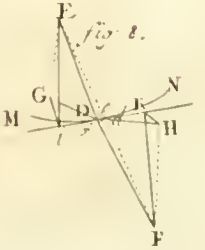
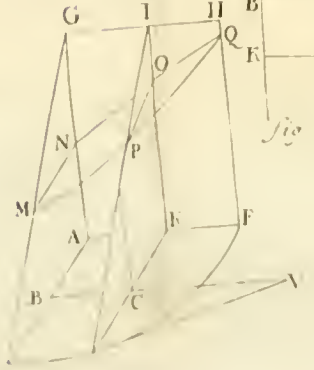


fig. 6.





Videamus nunc qualis sectio nascitura sit, cum planum secans per VP transit. Per punctum F ducatur ordinata FE ad diametrum AG, et alia quaecunque CB parallela FE. Nominentur $AE=p$, $FE=q$, $AB=x$, $BC=y$, $FC=u$, et tandem $PF=n$, fiantque brevitatis causa $r=l-p$, $s=m\pm q$, eruntque $x=p+\frac{ru}{n}$, et $y=q-\frac{su}{n}$, et suffectis hisce eorumque quadratis et factis in aequatione ad superficiem, orietur aequatio sectionis optatae, in qua etsi p, q, r, s in se spectatae variantes sunt intuitu tamen indeterminatarum x, y, z et u, manentes sunt, est vero aequatio ea quae sequitur, $az^2-(\frac{bs+r}{n})uz+(\frac{cs^2+fr^2}{n^2})u^2+(bq-ep+g)z-(\frac{2cqs-2fpr+br}{n})u+cq^2+fp^2-bp=o$. Compendii causa coefficientes secundi, tertii, quarti et quinti terminorum, dicantur β, γ, δ, ε, Φ, aequatio mutabitur in $az^2-\beta uz+\delta z-tu+\Phi=o$. Haec autem aequatio pro diuerso habitu coefficientum est ad singulas sectiones Conicas, vel subinde etiam ad lineam rectam.

Cum est ad lineam rectam, Conoides abit in Conum Ellipticum. Hoc autem specialius ostendere libet, non quidem ope aequationis modo inuentae, sed naturalius ope aequationis propositae Conoidis. Extrahantur ergo ex hac aequatione radices, tractando y tanquam incognitam, erit $2cy=-bz\pm\sqrt{(-4cfx^2+4cexz+b^2-4ac.z^2+4cbx-4cgz)}$. Dicatur pars surda huius aequationis $=R$, eritque $2cy+bz=\pm R$, seu facta $\frac{2cy+bz}{c}=\frac{2qv}{k}$, existente $v=k-z$, obtinetur

$\frac{2cqv}{k}$

$\frac{2cqv}{k} = \pm R$. Sed $-4cfx^2 + 4cexz + \overline{b^2 - 4ac}.z^2 + 4cbx - 4cgz = R^2$, praebet $fx^2 = exz + \frac{b^2-4ac}{4c}z^2 + bx - gz - \frac{1}{4c}R^2$, et extrahendo radices $2fx = ez + b \pm V(e^2 + \frac{b^2f-4acf}{c}z^2 + 2eb - 4fg.z + b^2 - \frac{f}{c}R^2)$. Sit nunc $\frac{ce^2-4acf+b^2f}{c} = \frac{2fg-eb^2}{b^2}$, et ſubſtituatur hoc in ſuperiori aequatione $(ce^2 - 4acf + b^2f)z^2 = (4cfg - 2ceb)z^2 - cb^2$, inuenietur $(\frac{2fg-eb}{b})^2 z^2 - 2(2fg - eb)z + b^2 = o$, et extrahendo radicem $\frac{2fg-eb}{b}z - b = o$, quare $k = \frac{b^2}{2fg-eb}$, et $2fg - eb = \frac{b^2}{k}$, propterea fit $\frac{ce^2-4acf+b^2f}{c} (= \frac{(2fg-eb)^2}{b^2}) = \frac{b^2}{k^2}$, qui ſupra in $V(\frac{ce^2-4acf+b^2f}{c}z^2 + 2eb - 4fg.z + b^2 - \frac{f}{c}R^2)$ ſubſtituta, producunt $2fx = ez + b \pm V(\frac{b^2z^2}{k^2} - \frac{2b^2z}{k} + b^2 - \frac{f}{c}R^2)$, et propter $v = k - z$, ſit $2fx - ez - b = \pm V(\frac{b^2v^2}{k^2} - \frac{fR}{c})$. In hac vero poſita $\frac{2fl-b}{k}$ pro e, et deinceps ſtatuatur $bx - lz = pv$, aequatio abit in $\frac{2fpv-bv}{k} = \pm V(\frac{b^2v^2}{k^2} - \frac{fR^2}{c})$, et quadrando $\frac{4f^2p^2v^2}{k^2} - \frac{4fbpv^2}{k^2} + \frac{b^2v^2}{k^2} = \frac{b^2v^2}{k^2} - \frac{fR^2}{c}$, quare deletis deſendis et reducta aequatione inuenitur $R^2 = \frac{4bpv^2-4fp^2v^2}{k^2}c = \frac{4c^2q^2v^2}{k^2}$, quare diuiſa hac aequatione per $\frac{4cv^2}{k^2}$, reſultat vtique $cq^2 = bp - fp^2$, aequatio ad Ellipſin, exiſtentibus $AE = p$, et $EF = q$.

Binae vero aequationes $2cky + bkz = 2cqv$, et $kx - lz = pv$, ſunt ad lineam rectam VF ex Coni vertice V ad punctum baſis F ductam. Agatur enim DC parallela VP, et DS aequidiſtans FP; habebimus DC.VP::FC.FP,::EB.EQ, id eſt DC (z).VP(k)::EB $(x-p)$.EQ$(l-p)$: haec analogia praebet $bx - lz = pv$.

Pariter

Pariter (PT($m+q$). PR($m+y$)::(FP. CP::VP(k).VS(v), quare $km+ky=mv+qv=km-mz+qv$, adeoque $qv=ky+mz$ (propter $m=\frac{bk}{2c}$) $=\frac{2cky+bkz}{2c}$, quare $2cqv=2cky+bkz$, adeo vt ex hisce appareat, binas aequationes $p=\frac{kx-lz}{k-z}$, et $q=\frac{2cky+bkz}{2ck-2cz}$, reuera indicare lineam rectam VF, vbicunque in peripheria Ellipſis punctum F aſſumtum fuerit. Ex hisce ergo cognoſcitur quod aequatio $az^2+bzy+cy^2-exz+fx^2+gz-bx=o$, ſit locus ſuperficiei conicae, ſi coefficientibus aeſtimationes, quas ſupra indicauimus, tribuantur.

In cono recto vbi VP incidit in centrum Ellipſis, inueniuntur $a=\frac{f-2c}{4c^2k}b^2$, $b=o$, $e=\frac{f-c}{ck}b$, $g=\frac{b^2}{2ck}$.

In cono recto circulari $a=\frac{-b^2}{2ck}$, $b=o$, $e=o$, et $g=\frac{b^2}{2ck}$.

XIV. Aequatio $az^2-bxz-cyz+ey^2=o$, eſt etiam ad ſuperficiem conicam, quae tamen ad planum horizontis alium ſitum habet, quae in caſu §. praecedentis. Sit $y=mx$, vbi m eſt conſtans reſpectu indeterminatarum x, y, et z, et aequatio mutabitur in hanc alteram $az^2=(cm+b)xz-em^2x^2$, adeoque $2az=(cm+b)x+\sqrt{(c^2-4ae.\ m^2x^2+2bcm+b^2}.\ x^2=(cm+b+\sqrt{(c^2-4ae.\ m^2+2bcm+b^2})x$, haec aequatio verò eſt ad lineam rectam. Si $m=o$, erit $z=\frac{bx}{a}$ vel $=o$, indicat quod conus planum horizontis per totam directricis longitudinem contingat, et $z=\frac{bx}{a}$, quod ſectio plani verticalis per directricem ducti et ſuperficiei conicae ſit linea recta inclinata ad directricem angulo cu-

ius sinus est ad cosinum vt b ad a. Et cum x et z simul ab o incipiant, inde concludendum, verticem coni in ipso plano horizontis et origine abscissarum situm esse.

Si vero $m = \frac{b \pm 2\sqrt{ae}}{4ae - c^2}$, plana horizontalia quae infistunt locis $y = mx$, superficiem coni contingunt; nam quia m geminum habet valorem propter signum ambiguum $\pm$ in numeratore, ideo aequatio $y = mx$, duas diuersas lineas denotat.

Fig. 2. XV. Praeterea positio basis circularis huius conicae superficiei sequenti modo indagari debet. Sit VL directrix in plano horizontis et EH linea quaecunque referens sectionem plani secantis HF, et horizontis. Ducatur AEG perpendicularis ad HE, sitque EF sectio plani verticalis horizonti, rectae AE insistentis, et plani inclinati HF, eritque adeo FEG inclinatio plani HF ad horizontem. Ex quolibet puncto D plani inclinati demissa sit in horizontem perpendicularis $DC = z$, et in plano HE, perpendicularis DF in EF, quae DF proinde aequidistans erit HE, cadet item FG perpendicularis in horizontem, et linea CG iungens puncta C et G, ipsis HE, et DF parallela erit; sit pariter CB perpendicularis ad VE, et dicantur $VB = x$, $CB = y$, $EF = HD = t$, $DF = CG = HE = u$, $DC = FG = z$, $VE = b$, $VA = f$, $AE = g = \sqrt{(f^2 + b^2)}$. Sinus anguli FEG $= DHC = r$, eius cosinus $= s = \sqrt{(1 - r^2)}$. His positis triangula similia AVE, LEH et LCB praebent $y = \frac{bu + fs}{g}$, $x = \frac{-fu + st + gb}{g}$, et triang. FEG, facit, vt sit $z = rt$.

$z = rt$. Suffectis hisce in locum indeterminatarum x, y, et z in aequatione propoſita coni, inuenietur aequatio $eb^2u^2 + 2efstu + ag^2r^2t^2 - bg^2hrt = o$, iam vt haec
$+bjgr \quad -bgrs$
$-cghr \quad -cjgrs$
$+ej^2s^2$
aequatio ſit ad circulum, fiant $eb^2 = ag^2r^2 - bgbrs - cfgrs + ef^2s^2$, et $2efhs + bfgr - cghr = o$. Nam aequatio tunc abit in $u^2 + t^2 - \frac{bg^2r}{eb}t = o$, quae eſt ad circulum cuius diameter $= \frac{bg^2r}{eb}$, et haec diameter coincidet cum EF. His poſitis quia $s^2 = 1 - r^2$, aequatio $2efhs + bfgr - cghr = o$, praebet $r^2 = \frac{4e^2f^2h^2}{(b^2f^2 - 2bcfh + c^2h^2)g^2 + 4e^2f^2h^2}$, et altera aequatio $ag^2r^2 - bghrs -$ etc. $= eb^2$, dat $r^2 = \frac{4e^2fh^4}{(b^2f^2 - 2bch^3 + 4aefh^2)g^2}$
$+2b^2$
$-c^2$
quare aequatis his aeſtimationibus, inuenietur $(b^2f^4 - c^2h^4 + 4aef^2h^2)g^2 = 4e^2f^2h^4$; quod ſi pro g^2 ſuf-
$+b^2$
$-c^2$
ficiatur $f^2 + h^2$, naſcetur $b^2f^6 + 4gef^4h^2 + 4aef^2h^4$
$+2b^2 \quad +b^2$
$-c^2 \quad -2c^2$
$-4e^2$
$-c^2h^6 = o$, aut facta $f^2 = h^2T$, inuenietur $b^2T^3 + 4aeT^2 + 4aeT - c^2 = o$, inuenta autem T ope
$+2b^2 \quad +b^2$
$-c^2 \quad -2c^2$
$-4e^2$
huius aequationis cubicae, innoteſcet etiam $f = h\sqrt{T}$.

Pona-

Ponatur praeterea $S^2 = T^2 + 1$, inuenietur diameter quaesita $\frac{bg^2r}{eb} = \frac{2bbs\sqrt{T}}{\sqrt{(b^2s^2T + c^2s^2 + 4e^2T - 2bcs^2\sqrt{T})}}$, et sinus inclinationis circuli ad horizontem, i. e. $t = \frac{2e\sqrt{T}}{\sqrt{(b^2s^2T + c^2s^2 + 4e^2T - 2bcs^2\sqrt{T}}}$. Atque sic omnia ea quae ad positionem et magnitudinem basis circularis coni indicandas inseruiunt ex aequatione locali ipsius coni elicuimus.

XVI. Ex hisce iam consequitur solutio maxime naturalis Problematis, quod *Cartesii* aeuo summorum Geometrarum industriam exercuit: *Nempe datis positione et magnitudine quacunque sectione Conica* Parabola, Hyperbola *aut* Ellipsi, *et puncto extra planum earum, inuenire positionem et magnitudinem circuli, qui basis sit Coni, ex quo hae figurae secari possint.*

Fig. 2. Sit generaliter aequatio sectionis datae $u^2 + qt^2 - pt = o$, in qua coefficientes p et q datae sunt, dein axis datae sectionis conicae sit EF, angulus FEG inclinationem plani sectionis ad horizontem, qui angulus propter datam positionem figurae datus est, sit eius sinus l et cosinus $m = \sqrt{(1-l^2)}$, producatur deinceps GE in A, et demittatur perpendicularis VA. Dicantur VE $= b$, VA $= i$, AE $= k$, et omnes hae lineae datae sunt, quare in aequatione §. praecedenti inuenta $eh^2u^2 + 2efhstu +$ etc. $= o$, tantummodo pro f et g sufficienda i et k, item l et m pro r et s, et habebitur aequatio sequens $+eh^2u^2 + 2ehimtu + ak^2l^2t^2 -$

$+bikl$ $-cbkl$ $+bbklm$ $-ciklm$ $+ei^2m^2$

bbk^2lt

- etc.

$bhk^2lt = o$. Iam vt haec aequatio formam propoſitae induat, oportet vt fiant $2ehim + bikl - chkl = o$, $ak^2l^2 - bhklm - ciklm + ei^2m^2 = eh^2q$, et $bhk^2l = eh^2p$, ex quibus elicientur $a = \frac{ek.np + eh^2q + e.^2m^2}{k^2l^2}$, $b = \frac{ehp}{k^2l}$ $c = \frac{eip + 2ekim}{k^2l}$. Surrogatis deinde his aeſtimationibus litterarum a, b, c, in aequatione Cubica ſupra inuenta $b^2T^3 + 4aeT^2 + 4aeT - c^2 = o$, et in reliquis determinationibus circuli, eiusque inclinationis ad horizontem; et inuenta ſunt, quae inuenienda erant.

$+2b^2$	$+b^2$
$-c^2$	$-2c^2$
	$-4e^2$

XVII. Haec ſolutio ad omnes tres ſectiones conicas ex aequo ſe extendit. Nam ſi ſectio data eſt *Ellipſis*, quam aequatio $u^2 + qt^2 - pt = o$, indicat coefficiens q debet eſſe affirmatiua, ſi *Hyperbola* eius ſignum tantum mutari debet in aeſtimatione literae a, et denique membrum illud in quo q ineſt prorſus eſt delendum, cum ſectio data eſt *Parabola*.

Solutionem huius problematis adducere placuit, vt vſum theoriae ſuperficierum ad aequationes ſuas locales reuocatarum in ſolutionibus problematum difficiliorum oſtenderem. Caeterum *Carteſius* in Epiſt. 75. Part. 3. Epiſtolarum primus aliquam huius Problematis ſolutionem exhibuit. Ille propoſitionem ibi in tres caſus diſtinguit, quorum primus eſt, cum data ſectio eſt Ellipſis et centro eius datum punctum perpendiculariter

incumbit; ſecundus eſt; cum perpendicularis a puncto dato cadit alibi in axem Ellipſeos, aut vtilibet in axem datae hyperbolae aut parabolae; tertius denique cum extra axes cadit. Pro duobus prioribus conſtructiones geometricas ibi tradit, et pro ſolutione tertii, quem in parabola tantum aggreſſus eſt, aequationem Cubicam inuenit, et circa Ellipſin aut Hyperbolam aliquanto longiorem et prolixiorem fore fatetur, aequationem tamen quartum gradum non eſſe exceſſuram. *Illuſtris Hoſpitalius* hoc idem quoque Problema excuſſit n. 441. Tractatus ſui Analitici de Sectionibus Conicis, et circa *Parabolam* et *Hyperbolam* datas in aequationes Cubicas itidem incidit. Via vero quam in ſolutionibus ſuis iniuit à *Carteſiana* et multo magis à noſtra differt.

Aequatio VI. $u^2-x^2-y^2=o$.

XVIII. Haec aequatio ad omnis generis ſolida rotunda ſpectat. Per u enim deſignatur quantitas vt libet
Fig. 3. compoſita ex tertia indeterminata z et conſtantibus. Sit enim circulus AHL baſis ſolidi, eiusque centro F perperpendiculariter incumbat axis FE circa hunc axem vero deſcripta ſit curua quaecunque EDFH, ſit diameter baſis AL directrix, et dicantur $FB=x$, BC quae directrici perpendicularis $=y$, et CD axi parallela $=z$, ductaque DG parallela CF dicatur $=u$, eritque adeo CH(DG)$=u$. Triangulum vero rectangulum CBF praebet $u^2=x^2+y^2$, adeoque $u^2-x^2-y^2=o$, eſt locus ſolidi rotundi orti ex reuolutione figurae EDHF circa axem EF.

Si

Si $u^2 = a^2 - \frac{a^2 z}{b}$, abit aequatio ſolidi in $x^2 + y^2 + \frac{a^2 z}{b} = a^2$, aequationem Conoidis Parabolici exiſtentibus $AF = a$, $EF = b$. Si $u^2 = a^2 - \frac{a^2 z^2}{b^2}$, aequatio mutatur in $x^2 + y^2 + \frac{a^2 z^2}{b^2} = a^2$, aequationem Conoidis Elliptici, quod in ſphaeram mutatur cum $a = b$. Eſt ergo $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ aequatio ſuperficiei ſphaericae.

XIX. Eadem aequatio $u^2 - x^2 - y^2 = o$, etiam omnis generis ſolida conoidea baſi obliqua, exponit modo axis ad horizontem obliquus ſit, vt in Tab. VI. Fig. 4. et applicatae $DC = z$, huic axi EF parallelae ſint: etſi enim ſectiones per axem EAF et EDHF inaequales ſunt, earum tamen aequationes eandem omnes formam ſeruare poſſunt. Fig. 5.

Methodus ducendi plana tangentia ad huius generis ſuperficies obliquas eadem eſt cum ea, quam ſupra expoſuimus; nam ſi ducatur CK directrici AL parallela et $= \frac{quz}{x}$, vbi $q = \frac{du}{dz}$, poſtea BC et producatur in I et fiat $CI = \frac{quz}{y}$, planum quod per puncta K, D, I transit ſuperficiem in puncto D continget. Et quoniam (conſtr.) $CK.CI (:: \frac{quz}{x} . \frac{quz}{y} :: y.x) :: BC.BF$, liquet lineam FC productam alteri KI puncta K, I iungenti ad angulos rectos in L occurrere. Sunt enim $\triangle\triangle$. CKI et CBF ſimilia, quare angulus $I = BFC =$ ang. KCL, et ang. $BCF =$ ang. LCI, adeoque ang. $CLI =$ ang. $CBF =$ recto. Hinc ergo ſequitur, quod recta LD puncta L et D iungens curuam EDH in puncto D contingat.

Hucusque ſuperficies tantum planas, cylindricas, conicas aut conoideas contemplati ſumus, ideo quod aequationes quas pro lubitu maxima ex parte aſſumſimus tales ſuperficies indicent, imo varias ſectiones horum ſuperficierum breuitatis cauſſa ſilentio praeteriimus, quae tamen conſiderari merebantur alia fortaſſe occaſione reſumendas. Nunc excutiendae eſſent adhuc nonnullae ſuperficies, quae ad ſpecies praecedentium referri non poſſunt. Sed quia hoc ſchediasma iam nimis longum videbitur, vnicum tantum Cono-Cuneum *Walliſii* examinabimus.

Fig. 5. XX. Fſt autem Cono-Cuneus ſolidum terminatum rectangulo GF, quod in radio AF plano quadrantis circuli AEF ad angulos rectos incumbit, triangulo rectangulo GAE, quadrante AEF, et ſuperficie curua ELFHG, ita comparata, vt ducto ex quolibet quadrantis puncto L recta LK, parallela radio EA, et ex K, KI parallela AG vel FH, linea recta LI iungens puncta L, I, ſuperficiei per totam ſuam longitudinem congruat. Quaerenda eſt primum aequatio localis huius ſuperficiei.

Ex quolibet eius puncto D demiſſa ſit in planum quadrantis perpendicularis $DC = z$ et ex C perpendicularis CK in radium AF, planum ILK transiens per DC et CK eſt triangulum rectangulum per naturam huius ſuperficiei. Dicantur $AE = AF = a$, $AG = FH = b$, et CB parallela $AF = y$, $AB = x$, erit

$LK =$

$LK = V(a^2 - y^2)$, et $LC = -x + V(a^2 - y^2)$, et $\Delta\Delta$ ſimilia LCD, LKI praebent aequationem $(b-z)V(a^2-y^2) = bx$ ſuperficiei propoſitae, quae aequatio a ſurditate liberata fit, $y^2z^2 - 2by^2z - a^2z^2 + b^2y^2 + b^2x^2 + 2a^2bz - a^2b^2 = o$. Ex aequatione vero $(b-z)V(a^2-y^2) = bx$ cognoſcitur.

1. Quod omnis ſectio Cono-Cunei horizontis plano aequidiſtans, ſit Quadrans Ellipſis, exceptis duobus caſibus, cum $z = o$, tunc enim ſectio abit in quadrantem Circuli AEF, qui Cono-Cunei baſis eſt, deinde cum $z = b$, tunc enim ſectio contrahitur in lineam rectam GH.

2. Quod omnis ſectio plano AH parallela ſit figura quarti gradus, exceptis caſibus cum $x = o$, tunc enim ſectio abit in rectangulum GF, et cum $x = a$, hoc caſu enim ſectio euaneſcit in punctum E.

3. Quod omnis ſectio plano EGA parallela ſit triangulum, excepto caſu quo $y = a$, tunc enim ſectio euaneſcit in lineam rectam HF.

4. Quod omnis ſectio, cum planum ſecans transit per GA, ſit linea quarti gradus, cuius aequatio eſt $(b-z)V(a^2n^2 - m^2t^2) = bt$, exiſtente $n = V(m^2 + 1)$. Exceptis caſibus cum transit per AF vel AF.

5. Quod, ducta qualibet MN parallela EA, et alia NQ vtcunque obliqua ad GA, et plano ſecante transeunte per MN et NQ, ſectionis MPQN aequatio futura ſit, $(afh - aeh)V(h^2 - t^2) = bh^2u$, vocando

$GN-HZ=e$, $GN=f$, $NZ=b$, $NO=t$, et $OP=u$. Curua MPZ habebit punctum flexus contrarii in P, Capiendo NO aequalem subtensae arcus sub tripli eius cuius subtensa est $=\frac{tb}{e}$, et radius $=bV\frac{1}{2}$.

6. Si in producta BC capiatur $CV=\frac{xy^2-a^2x+(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{xy}$ planum per puncta D, L, V transiens superficiem in puncto D continget.

7. Portio superficiei inter rectas EG, LI pendet partim à quadratura circuli, partim etiam a quadratura curuae, cuius applicata $=V(\frac{c^2-u^2}{au-u^2})$ et abscissa u, et $GE=c$.

Plura alia circa Cono-Cuneum annotari potuissent nisi breuitati esset consulendum. Ceterum *Wallisius* integrum Tractatum circa hoc solidum conscriptum ad calcem suae Algebrae edidit.

Possunt eiusmodi Cuno-Cunei excogitari, quorum bases non quadrans circuli, sed aliae curuae essent. Restat vt paucis adhuc agamus

De Linea breuissima in quacunque superficie proposita inter duo data puncta ducenda.

Fig. 6. XXI. Si in superficie quacunque curua inter duo data puncta E et F breuissima linea EDF ducenda sit, aliud non videtur agendum, quam vt ex medio P lineolae EF data puncta E, F indefinite vicina iungentis, ad hanc lineolam breuissima perpendicularis quaeratur, quae inter superficiem et hanc lineolam intercipi

cipi poſſit, occurſus enim huius perpendicularis et ſuperficiei videtur indicare punctum medium D lineae breuiſſimae EDF.

Principium tamen iſtud non eſſe admittendum vel ideo patet, quod linea PD ex puncto quidem medio P, ſed ſuperficiei ipſi non vero lineolae EF perpendiculariter ducta praebeat lineolas ED, DF, quarum ſumma minor ſit ſumma lineolarum priore modo ductarum. Ad hoc probandum ducatur in Schemate ſeparato EF aequalis lineolae data puncta in ſuperficie data iungentis, cuius puncto medio P ipſi ad normam inſiſtat PH aequalis breuiſſimae perpendiculari ad EF quae inter hanc et ſuperficiem duci poteſt; et PG aequalis illi lineolae quae ex puncto P perpendiculariter in ſuperficiem cadit. Eritque PG minor quam PH; nam quia PG quippe aequalis illi quae ex P perpendiculariter in ſuperficiem cadit minima eſt linea omnium earum quae ex eodem puncto P ad ſuperficiem duci poſſunt, et PH diuerſa eſt à PG, quippe quae aequat illam quae non ſuperficiei ſed rectulae EF perpendicularis eſt; Quare ductis EG, EH et FG, FH, erit $EG+FG<EH+FH$, et hoc quidem in hypotheſi quod lineola PD quae perpendiculariter in ſuperficiem cadit, ſimul etiam ad EF perpendicularem eſſe: verum tale quid raro contingit, ſed plerumque lineolae EF obliqua eſt. Sit ergo in altera parte figurae 7. triangulum EDF illud ipſum triangulum quod producitur in fig. 6. cum PD perpendiculariter in ſuperficiem cadit et lineolae EF obliqua eſt; et oſtendam quod $ED+FD<FG+FG$ adeoque adhuc $<EH+FH$. Eſt Fig. 7.

Eſt enim $a^4+2a^2p^2-4a^2m^2p^2+p^4 < a^4+2a^2p^2+p^4$, vel ſumtis radicum duplis $2\sqrt{(a^4+2a^2p^2-2a^2p^2+p^4)} < 2a^2+2p^2$, quicquid a, m, et p ſignicent, addatur vtrinque $2a^2+2p^2$, eritque $2a^2+2p^2+2\sqrt{(a^4+2a^2p^2-2a^2m^2p^2+p^4)} < 4a^2+4p^2$, et ſumtis radicibus $\sqrt{(a^2+2amp+p^2)}+\sqrt{(a^2-2amp+p^2)} < 2\sqrt{(a^2+p^2)}$. Quare ſi dicantur EP = FP = a, PG = PD = p, ſin. ang. PDL = m, et radius = 1, erunt FD = $\sqrt{(a^2+2amp+p^2)}$, ED = $\sqrt{(a^2-2amp+p^2)}$ et EG = FG = $\sqrt{(a^2+p^2)}$, ſit FD + ED < FG + EG < FH + EH. Quod erat demonſtratum.

Fig. 8. XXII. Quod ſi vero ſolutionem problematis ita velimus tentare, vt in curua MN quae communis eſt ſectio plani horizonti paralleli et ſuperficiei propoſitae, quaeratur punctum D hac lege, vt ſumma rectarum ED FD euadat minima, res quidem effectu erit facillima, alio enim ad id non opus eſt quam, vt quod vt iam inuentum conſideramus, alterum d viciniſſimnm aſſumamus et ductis deinceps lineolis Ed, Fd, centrisque E et F arculis De et df, incrementum ed lineolae ED aequale faciamus decremento Df alterius FD. Nam ducta tangente IK ad curuam in D, demiſſisque ex E et F perpendiculis EI, FK in hanc tangentem reſultabunt inde duo triangulorum ſimilium paria, nempe EID, Ded, et FHd, dfD, quae praebent ED. DI :: Dd. ed, et DF. DH :: Dd. Df, quare propter Df = ed, ſit ED. DI :: DF. DH, ex quo conficitur quod ratio DE ad DI ſit vbique eadem, ex quo principio deinceps aequatio differentialis curuae illius quae eſt proiectio

ctio praetenſae breuiſſimae lineae ſuperficiei in planum horizontis facile inueniri poteſt.

Sed etiam hoc principium fallax eſt: Nam demiſſis in planum curuae MN perpendiculis EG, FH, ſi hae aequales ſint, planum GMN ſecabit lineolam EF data puncta iungentem in eius medio P, et lineola ex puncto D ad P ducta, quae ſita eſt in plano curuae MN horizonti parallelo, ſuperficiei non poteſt perpendicularis eſſe, ideo per praecedentia ſumma linearum ED, FD maior eſt quam ſumma lineolarum ED, FD, in fig. 6.

XXIII. Ex hisce ergo, quae in duobus §§. praecedentibus oſtenſa ſunt, vltro ſequitur, quod ſumma lineolarum ED, FD futura ſit minima, cum DP quae per medium lineolae EF transit ſuperficiei curuae perpendicularis eſt, vel quod eodem redit, cum planum tangens in D et planum trianguli EDF ſibi inuicem ad angulos rectos occurrunt. Fig. 5.

Ponamus ergo hoc ita eſſe, demiſſisque ex punctis E, F, D et P perpendicularibus in planum horizontis EG, FH, DC et PQ, productaque DP vsque ad occurſum O cum horizonte; puncta C, Q, O erunt in vna eademque linea recta CO: lineae enim DC, PQ in eodem ſunt plano verticali DCO, rectaque GO communis eſt ſectio huius plani et horizontis. Iungantur GC, HC, ductisque ad directricem AT perpendicularibus GI, HK, CB et QT; ducantur praeterea

GK, CM, CN parallelae AB, nec non ON parallela CB, hisque praeparatis, dicantur $AI=x$, $IG=y$, $EG=z$, $GL=dx$, $LG=dy$, $EG-DC=dz$, erunt $CS=-\frac{1}{2}ddx$, $SQ=\frac{1}{2}ddy$, et recta PR parallela CO, $DR=\frac{1}{2}ddz$. Et quia DPO (hyp.) ad superficiem perpendicularis est, dicantur $CN=m$, $ON=n$, et $CO=p$. His positis $\Delta\Delta$ similia CSQ, CNO, nec non DPR et DCO, praebent $ddx=\frac{-m\,ddz}{z}$, $ddy=\frac{n\,ddz}{z}$. Sint lineolae GC, HC projectiones elementorum ED, FD lineae brevissimae inter duo puncta E et F in planum horizontis, et radius osculi curuae GCH in G, dicatur r, et habebimus generaliter $r\,dx\,ddy-r\,dy\,ddx=ds^3$, in qua si in locum elementorum ddx, ddy substituantur $\frac{m\,ddz}{z}$ et $\frac{n\,ddz}{z}$, proueniet $nr\,dx\,ddz+mr\,dy\,ddz=z\,ds^3$, existente $GC=ds$, quare $ddz=\frac{z\,ds^3}{nr\,dx+mr\,dy}$; propterea fient $ddx=\frac{-m\,ds}{nr\,dx+mr\,dy}$, et $ddy=\frac{n\,ds}{nr\,dx+mr\,dy}$. Haec generalia sunt pro omni superficie in qua planum tangens angulum rectum continet cum plano trianguli EDF; sed si idem planum tangens superficiem in D angulum quemcunque obliquum formare debeat cum plano trianguli EDF, cuius sinus sit $=g$, et cosinus $=h$, erunt quidem, vt paulo ante, $ddx=\frac{-m\,ds^3}{nr\,dx+mr\,dy}$, et $ddy=\frac{n\,ds^3}{nr\,dx+mr\,dy}$, sed aestimatio elementi ddz alia inuenietur, nempe $ddz=\frac{(gz+hp)\,p\,ds^3}{(gp-hz)\times(m\,dy+n\,dx)r}$; ad abbreuiandum, fiant $E=gz+hp$, $F=gp-hz$, et $du=m\,dy+n\,dx$, erunt ergo $ddx=\frac{-m\,ds^3}{r\,du}$, $ddy=\frac{n\,ds^3}{r\,du}$, $ddz=\frac{E\,p\,ds^3}{F\,r\,du}$.

Sit $dz=A\,dy+B\,dx$ aequatio differentialis superficiei propositae, in qua A, B significant magnitudines

vt

vt libet datas per x, y et z; quae ad ſecundas differentias reducta praebet, $ddz = A\,ddy + B\,ddx + \alpha\,dy^2 + 2\mathfrak{B}\,dx\,dy + \mathfrak{C}\,dx^2$, vbi α et $\mathfrak{B}$ ſignificant fractiones $\frac{dA}{dy}$, $\frac{dB}{dx}$. Suffectis ergo in aequatione hac differentio-differentiali $\frac{-m\,ds^3}{r\,du}$, $\frac{n\,ds^3}{r\,du}$, et $\frac{E\,p\,ds^3}{F\,r\,du}$, pro ddx, ddy et ddz, et reductione aequationis reſultantis inuenietur aeſtimatio litterae r, nempe $r = \frac{(Ep - AFn + BFm)\,ds^3}{(\alpha\,dy^2 + 2\mathfrak{B}\,dx\,dy + \mathfrak{C}\,dx^2)\,F\,du}$. Eſt etiam $r = \frac{ds^3}{dx\,ddy - dy\,ddx}$, quare $\frac{Ep - AFn + BFm}{(\alpha\,dy^2 + 2\mathfrak{B}\,dx\,dy + \mathfrak{C}\,dx^2)F\,du} = \frac{1}{dx\,ddy - dy\,ddx}$, hinc habetur $dx\,ddy - dy\,ddx = \frac{(\alpha\,dy^2 + 2\mathfrak{B}\,dx\,dy + \mathfrak{C}\,dx^2)(m\,dy + n\,dx)F}{Ep - AFn + BFm}$, aequatio differentialis curuae GCH, quae quidem ita generaliter ſumta irreducibilis eſt, nec niſi particularibus quibusdam caſibus ad aequationem differentialem primi gradus reuocari poteſt. Priusquam vero reductio eius tentetur, ſufficienda eſt in ea aeſtimatio tertiae indeterminatae z per y, x et conſtantes ex aequatione data ſuperficiei. Sunt praeterea $m = Bz$, $n = Az$, $p = Cz$, exiſtente $C = \sqrt{(A^2 + B^2)}$, nec non $\alpha\,dy^2 = dA\,dy$, $\mathfrak{C}\,dx^2 = dB\,dx$, quare $dx\,ddy - dy\,ddx = \frac{(dA\,dy + dB\,dx) \times (B\,dy + A\,dx)F}{EC - A^2F + B^2F}$.

METHODVS GENERALIS SVMMANDI PROGRESSIONES.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

PRopoſui anno praeterito methodum innumeras progreſſiones ſummandi, quae non ſolum ſe ad ſeries algebraicam ſummam habentes extendit, ſed earum etiam, quae algebraice ſummari nequeunt, ſummas a quadraturis curuarum pendentes exhibet. Synthetica tum vſus ſum methodo; generalibus enim aſſumtis formulis quaeſiui ſeries, quarum ſummae iis formulis exprimerentur. Hocque modo plurimas ſeries generales adeptus ſum, quarum ſummas poteram aſſignare. Propoſita igitur quapiam progreſſione ſummanda, neceſſe erat eam cum illis formulis comparare, et indagare, num in aliqua earum contineatur. Potuiſſem autem numerum earum generalium ſerierum in infinitum multiplicare, et propterea ſaepius mihi ſeries occurrerunt, quae etiamſi in datis generalibus non comprehenderentur, ipſa tamen methodo poterant ſummari. Quo igitur facilius magisque in promtu ſit ſeriei cuiuscunque propoſitae ſummam, ſi quidem fieri poteſt, inuenire, communicabo hic methodum analyticam, qua ex ipſius ſeriei natura terminum ſummatorium exuere licet. Latiſſime ea patet; non ſolum enim omnium earum ſerierum, quarum ſummae tot diuerſis modis iam ſunt erutae, ſed infinitarum

tarum aliarum ſummas ſimili et facili operatione inuenire docet.

§. 2. Si aeque eſſet facile dato termino generali inuenire ſummatorium, ac inuerſe ex ſummatorio generalem maximum hoc eſſet ſubſidium in ſummatione ſerierum. Poteſt quidem inter terminum ſummatorium et generalem dari aequatio, at quia ex infinitis conſtat terminis, ex ea non multum adiuuamur. At tamen inſigne inde naſcitur compendium, ad progreſſionum algebraicarum ſummas exhibendas. Sit terminus generalis ſeu is, cuius exponens eſt n in progreſſione quacunque t, et terminus ſummatorius ſeu ſumma omnium terminorum a primo vsque ad $t = s$; erit $t = \frac{ds}{1dn} - \frac{ddz}{1.2.dn^2} + \frac{d^3s}{1.2.3.dn^3} - \frac{d^4s}{1.2.3.4.dn^4} +$ etc. in qua aequatione poſitum eſt dn conſtans. Transmutari autem haec aequatio poteſt in hanc $s = \int t\,dn + \alpha t + \frac{\beta dt}{dn} + \frac{\gamma d^2t}{dn^2} + \frac{\delta d^3t}{dn^3} +$ etc. in qua coefficientes α, β, γ etc. ſequentes habent valores, $\alpha = \frac{1}{2}$; $\beta = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{6}$; $\gamma = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{24}$; $\delta = \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{6} + \frac{\alpha}{24} - \frac{1}{120}$; $\varepsilon = \frac{\delta}{2} - \frac{\gamma}{6} + \frac{\beta}{24} - \frac{\alpha}{120} + \frac{1}{720}$; etc. Fiet autem $s = \int t\,dn + \frac{t}{2} + \frac{dt}{12\,dn} - \frac{a^3t}{720\,dn^3} + \frac{d^5t}{30240\,dn^5}$ etc. Quoties igitur t eiusmodi habet valorem, vt ſeries s praebens vel alicubi abrumpatur, vel fiat ſummabilis, tum ope huius aequationis reperietur s ex t. Euenit autem illud, ſi t eſt functio algebraica rationalis ipſius n, et praeterea ſi eſt fractio, modo n non in denominatorem ingrediatur. E.g. ſit $t = n^2 + 2n$, erit $dt = 2ndn + 2dn$, $ddt = 2dn^2$, $d^3t = 0$ etc. Erit ergo $s = \int (n^2 + 2n)\,dn + \frac{n^2+2n}{2} + \frac{2n+2}{12} = \frac{n^3}{3} + \frac{3n^2}{2} + \frac{7n}{6} = \frac{2n^3+9n^2+7n}{6}$.

§. 3. Methodus autem, quam hic ſum expoſiturus, ita ſe habet, vt progreſſio propoſita certis quibusdam operationibus vel ad aliam ſimpliciorem, quae ſummari poteſt, vel iterum ad ſe ipſam reducatur; vtroque enim modo ſumma progreſſionis propoſitae conſtabit. Operationes, quibus in hisce transformationibus vtor, ſunt vel vulgares vt additio, ſubtractio etc. vel ex altiori analyſi, ſumtae vt differentiatio et integratio. Illa quidem aliis ſeriebus non inſeruiunt, niſi quarum ſummatio iam eſt cognita et algebraice aſſignari poteſt; His vero etiam progreſſionum ſummas algebraicas non habentium ſummae a curuarum quadraturis pendentes reperiuntur. Omnes autem ſeries ad quas haec methodus accommodari poteſt, in ſe complectuntur progreſſionem geometricam, et huiusmodi habent formam $\alpha x^a + \beta x^{a+b} + \gamma x^{a+2b} + \delta x^{a+3b} +$ etc. Id quod non impedit, quo minus progreſſio quaecunque in hac forma contineatur.

§. 4. Vt a ſimpliciſſimis incipiam, ſit progreſſio propoſita geometrica, $x^a + x^{a+b} + x^{a+2b} + x^{a+3b} + \text{- - - - - - - } x^{a+(n-1)b}$, in qua extremus terminus eſt is cuius index eſt n, atque hoc in ſequentibus ſemper notetur, terminum vltimum eſſe eum, cuius index eſt n, ne opus habeam indices adſcribere; et proinde etiam ſemper ſummam vsque ad terminum indicis n exhibebo. Ponatur ſumma progreſſionis propoſitae s, erit $s = x^a + x^{a+b} + x^{a+2b} \text{- - - - } + x^{a+(n-1)b}$ tunc fiet $s - x^a = x^{a+b} + x^{a+2b} \text{- - - - - } + x^{a+(n-1)b}$, addatur vtrinque x^{a+nb} et diuidatur per x^b, prodibit $\frac{s - x^a + x^{a+nb}}{x^b} = x^a$

$= x^a + x^{a+b} - - - - - - x^{a+(n-1)b} = s$. Habemus igitur aequationem $s - x^a + x^{a+nb} = s x^b$, ex qua inuenitur $s = \frac{x^a - x^{a+nb}}{1 - x^b}$; quae eſt ſumma progreſſionis geometricae propoſitae. Eſt ergo hoc exemplum, quo progreſſio propoſita in ſe ipſam transmutatur. Si fuerit x fractio vnitate minor et n numerus infinite magnus, erit $x^{a+nb} = 0$ atque $s = \frac{x^a}{1 - x^b}$, ſummam praebebit progreſſionis geometricae $x^a + x^{a+b} + x^{a+2b} - - - -$ etc. in infinitum continuatae. Si fuerit $x = 1$ patet eſſe $s = n$, id vero difficilius apparet ex aequatione $s = \frac{x^a - x^{a+nb}}{1 - x^b}$, quia numerator et denominator euaneſcunt. Vt vero valor hoc in caſu inueniatur, ponatur $x = 1 - \omega$, denotante ω quantitatem infinite paruam, erit $x^a = 1 - a\omega$, $x^{a+nb} = 1 - (a + nb)\omega$ et $x^b = 1 - b\omega$. Hincque fit $s = \frac{nb\omega}{b\omega} = n$. Apparet etiam ſi terminus generalis ſeriei fuerit $\alpha x^{a+(n-1)b}$ fore terminum ſummatorium $\frac{\alpha x^a - \alpha x^{a+nb}}{1 - x^b}$.

§. 5. Sit nunc propoſita iſta progreſſio $x^a + 2x^{a+b} + 3x^{a+2b} + - - - - - + nx^{a+(n-1)b}$, cuius ſumma ponatur s. Erit $s - x^a = 2x^{a+b} + 3x^{a+2b} - - - nx^{a+(n-1)b}$ addatur ſequens terminus $(n+1)x^{a+nb}$ et diuidatur per x^b, erit $\frac{s - x^a + (n+1)x^{a+nb}}{x^b} = 2x^a + 3x^{a+b} - - - - (n+1)x^{a+(n-1)b}$. Subtrahatur ab hac ſerie prior ſcilicet

cet ipſa propoſita prodibit $\frac{s-x^a+(n+1)x^{a+nb}}{x^b}-s=$
$x^a+x^{a+b}+x^{a+2b}-\cdots-x^{a+(n-1)b}=\frac{x^a-x^{a+nb}}{1-x^b}$. Ex
hac inuenitur $s=\frac{x^a-(n+1)x^{a+nb}}{1-x^b}+\frac{x^{a+b}-x^{a+(n+1)b}}{(1-x^b)^2}$
$=\frac{x^a-(n+1)x^{a+nb}+nx^{a+(n+1)b}}{(1-x^b)^2}=\frac{x^a-x^{a+nb}}{(1-x^b)^2}-\frac{nx^{a+nb}}{1-x^b}$
Qui eſt terminus ſummatorius reſpondens termino generali $nx^{a+(n-1)b}$. Si fuerit $x<1$ et ponatur $n=\infty$ prodibit ſeriei propoſitae in infinitum continuatae ſumma $=\frac{x^a}{(1-x^b)^2}$. Si autem fiat $x=1$ prodire debet ſumma progreſſionis $1+2+3+4+\cdots+n$, hic vero eadem, quae ante oritur difficultas, numeratore et denominatore euaneſcentibus; pono igitur iterum $x=1-\omega$ erit $1-x^b=b\omega$; $x^a=1-a\omega+\frac{a(a-1)\omega^2}{2}$; $x^{a+nb}=1-(a+nb)\omega+\frac{(a+nb)(a+nb-1)\omega^2}{2}$ et $x^{a+(n+1)b}=1-(a+(n+1)b)\omega+\frac{(a+(n+1)b)(a+(n+1)b-1)\omega^2}{2}$ fitque $s=\frac{(n^2b^2+n^2)\omega^2}{2b^2\omega^2}=\frac{nn+n}{2}$. Praeterea ſi terminus generalis ſit $\mathfrak{C}nx^{a+(n-1)b}$ erit terminus ſummatorius $=\frac{\mathfrak{C}x^a-\mathfrak{C}x^{a+nb}}{(1-x^b)^2}-\frac{\mathfrak{C}nx^{a+nb}}{1-x^b}$.

§. 6. Simili modo inuenientur termini ſummatorii, ſi termini generales ſint $n^2x^{a+(n-1)b}$, $n^3x^{a+(n-1)b}$ etc. ſemper enim ſummatio reducitur ad ſummationem ſeriei gradus inferioris. Ex quo intelligitur hac ratione inueniri poſſe generaliter terminum ſummatorium ſpon-

ſpondentem termino generali $(\alpha + \beta n + \gamma n^2 + \text{etc.})$ $x^{\alpha+(n-1)\beta}$. In his autem abſoluendis longius non immoror, quia iam dudum ſatis ſunt cognita. Ideo haec tantum attuli, vt methodi vis etiam per vulgares operationes pateſcat. Progredior igitur vltra, et quaenam ſeries ope differentiationis et integrationis in ſummam redigi queant, inueſtigabo. Primo quidem etiam progreſſiones algebraicae modo tractatae ſummantur, et ſummae inueniuntur a iam datis non differentes; attamen earum inuentio per has operationes videtur facilior et breuior. Hanc ob rem ab his iterum incipio.

§. 7. Sit progreſſio ſummanda $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 - - - - nx^n$ ponatur ea $= s$; diuidatur per x et multiplicetur per dx, erit $\frac{s\,dx}{x} = dx + 2x\,dx + 3x^2\,dx - - - - - nx^{n-1}\,dx$, ſumtisque integralibus habetur $\int \frac{s\,dx}{x} = x + x^2 + x^3 - - - - x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1-x} -$. Ex aequatione igitur $\int \frac{s\,dx}{x} = \frac{x - x^{n+1}}{1-x} -$ differentiata inuenietur s. Erit enim $\frac{s\,dx}{x} = \frac{dx - (n+1)x^n\,dx + nx^{n+1}\,dx}{(1-x)^2} -$, vnde prodit $s = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2} -$, vt ante §. 5. ſi ibi loco a et b ſcribatur 1. Ex hoc intelligi poteſt quomodo progreſſionis $ax^\alpha + (a+b)x^{\alpha+\beta} + (a+2b)x^{\alpha+2\beta} + - - - (a + (n-1)b)x^{\alpha+(n-1)\beta}$ ſumma ſit inuenienda. Ponatur enim haec ſumma quaeſita s, et multiplicetur per $x^\pi\,dy$, erit $x^\pi s\,dy = ax^{\alpha+\pi}\,dy + (a+b)$

$x^{\alpha+\varepsilon+\pi}dy$ - - - - $(a+(n-1)b)x^{\alpha+(n-1)\varepsilon+\pi}dy$. Fiat iam $x^{\alpha+\pi}=y^{a-1}$, et $x^{\alpha+\varepsilon+\pi}=y^{a+b-1}$; erit $x^{\varepsilon}=y^{b}$ et $x=y^{b:\varepsilon}$. Hincque fiet $x^{\alpha+\pi}=y^{(\alpha+\pi)b:\varepsilon}=y^{a-1}$. Ergo erit $\pi=\frac{\varepsilon a-\alpha\varepsilon-\varepsilon}{b}$. Atque $x^{\alpha+(n-1)\varepsilon+\pi}=y^{a+(n-1)b-1}$ His positis erit $x^{\frac{\varepsilon a-\alpha b-\varepsilon}{b}}sdy=ay^{a-1}dy+(a+b)y^{a+b-1}dy+$ - - - $(a+(n-1)b)y^{a+(n-1)b-1}dy$, sumtisque integralibus $\int x^{\frac{\varepsilon a-\alpha b-\varepsilon}{b}}sdy=y^{a}+y^{a+b}+$ - - - - $+y^{a+(n-1)b}=\frac{y^{a}-y^{a+nb}}{1-y^{b}}$. Quia vero est $y^{b}=x^{\varepsilon}$; erit $y=x^{\frac{\varepsilon}{b}}$ et $dy=\frac{\varepsilon}{b}x^{\frac{\varepsilon-b}{b}}dx$, hisque substitutis $\frac{\varepsilon}{b}\int x^{\frac{\varepsilon a-\alpha b-b}{b}}sdx=\frac{x^{\frac{a\varepsilon}{b}}-x^{\frac{a\varepsilon+nb\varepsilon}{b}}}{1-x^{\varepsilon}}$. Haec eadem aequatio potest facilius sine permutatione variabilis x inueniri hoc modo: Multiplicetur progressio proposita per $px^{\pi}dx$, erit $px^{\pi}sdx=pax^{\alpha+\pi}dx+$ - - - - - - $p(a+(n-1)b)x^{\alpha+(n-1)\varepsilon+\pi}dx$. Determinentur p et π ita vt sit $\alpha+(n-1)\varepsilon+\pi=p(a+(n-1)b)-1$ seu $\alpha+\pi+(n-1)\varepsilon=ap+(n-1)bp-1$. Ex qua, quia p et π ab n pendere nequeunt, duae resurgunt aequationes $\varepsilon=bp$ et $\alpha+\pi=ap-1$, vnde prodit $p=\frac{\varepsilon}{b}$ et $\pi=\frac{a\varepsilon-\alpha b-b}{b}$. His substitutis, et integralibus sumtis, proueniet vt ante $\frac{\varepsilon}{b}\int x^{\frac{a\varepsilon-\alpha b-b}{b}}sdx=x^{\frac{a\varepsilon}{b}}+x^{\frac{a\varepsilon+\varepsilon}{b}}$ - - - $+x^{\frac{a\varepsilon+(n-1)b\varepsilon}{b}}=\frac{x^{\frac{a\varepsilon}{b}}-x^{\frac{a\varepsilon+nb\varepsilon}{b}}}{1-x^{\varepsilon}}$.

§. 8. Sit progressionis propositae terminus ordine n, hic $(an+b)(cn+e)x^{\alpha+(n-1)\varepsilon}$; ponatur huius terminus

minus ſummatorius s: erit $s = (a+b)(c+e)x^{\alpha} + (2a+b)(2c+e)x^{\alpha+\beta} + \text{------} + (an+b)(cn+e)x^{\alpha+(n-1)\beta}$, multiplicetur per $px^{\pi}dx$, fiet $psx^{\pi}dx = p(a+b)(c+e)x^{\alpha+\pi}dx + \text{------} + p(an+b)(cn+e)x^{\alpha+(n-1)\beta+\pi}dx$. Sit $pcn + pe = \alpha + n\beta - \beta + \pi + 1$, debebit eſſe $p = \frac{\beta}{c}$ et $\pi = \frac{\beta e + \beta c - \alpha c - c}{c}$. Ergo ſumtis integralibus erit $\frac{\beta}{c}\int \pi^{\pi} s\,dx = (a+b)x^{\alpha+\pi+1} + \text{----} (an+b)x^{\alpha+(n-1)\beta+\pi+1}$. Multiplicetur denuo per $qx^{\varrho}dx$, erit $\frac{\beta}{c}qx^{\varrho}dx\int x^{\pi}s\,dx = q(a+b)x^{\alpha+\pi+\varrho+1}dx + \text{------} q(an+b)x^{\alpha+(n-1)\beta+\pi+\varrho+1}dx$, fiatque $anq + bq = \alpha + n\beta - \beta + \pi + \varrho + 2$, hinc erit $q = \frac{\beta}{a}$ et $\varrho = \frac{\beta b - \alpha a + \beta a - \pi a - 2a}{a} = \frac{\beta bc - ac - \beta e}{ac}$. Sumtisque integralibus proueniet $\frac{\beta^2}{ac}\int x^{\varrho}dx\int x^{\pi}s\,dx = x^{\alpha+\pi+\varrho+2} + \text{---} + x^{\alpha+(n-1)\beta+\pi+\varrho+2} = \frac{x^{\alpha+\pi+\varrho+2} - x^{\alpha+n\beta+\pi+\varrho+2}}{1-x^{\beta}}$ ſeu haec aequatio $\frac{\beta^2}{ac}\int x^{\frac{\beta bc - \beta e - ac}{ac}}dx\int x^{\frac{\beta e + \beta c - ac - c}{c}}s\,dx = \frac{x^{\frac{\beta(c+b)}{a}} - x^{\frac{\beta(a+b+na)}{a}}}{1-x^{\beta}} = x^{\frac{\beta(a+b)}{a}}\left(\frac{1-x^{n\beta}}{1-x^{\beta}}\right)$. Simili modo operatio eſt inſtituenda, ſi plures duobus factores fuerint in termino generali, ex quo ſimul apparet, tot prodire ſigna integralia, quot ſunt factores in coefficiente termini generalis.

§. 9. Si fuerit progreſſionis ſummandae terminus generalis $\frac{x^{\alpha+(n-1)\beta}}{an+b}$, operatio a priori in hoc tantum differt, quod hic differentiatione abſolui debeat, quod

ibi integralibus ſumendis perficiebatur. Sit igitur terminus ſummatorius quaeſitus s, erit $s = \frac{x}{a+b} + \cdots + \frac{x^{\alpha+(n-1)\beta}}{an+b}$, atque $px^{\pi}s = \frac{px^{\alpha+\pi}}{a+b} + \cdots + \frac{px^{\alpha+(n-1)\beta+\pi}}{an+b}$. Sumantur differentialia prodibit $px^{\pi} ds + p\pi x^{\pi-1} s\,dx = \frac{p(\alpha+\pi)x^{\alpha+\pi-1}\,dx}{a+b} + \cdots + \frac{p(\alpha+n\beta-\beta+\pi)x^{\alpha+(n-1)\beta+\pi-1}\,dx}{an+\beta-}$. Fiat $p\alpha + pn\beta - p\beta + p\pi = an+b$, erit $p = \frac{a}{\beta}$ et $\pi = \beta - \alpha + \frac{b\beta}{a}$. Ergo $\frac{ax^{\beta-\alpha+\frac{b\beta}{a}} ds + (a\beta - a\alpha + b\beta)x^{\beta-\alpha+\frac{b\beta}{a}-1} s\,dx}{\beta\,dx} = x^{\frac{a\beta+b\beta-a}{a}} + \cdots + x^{\frac{n\beta+b\beta-a}{a}} = x^{\frac{a\beta+b\beta-a}{a}} \left(\frac{1-x^{n\beta}}{1-x^{\beta}}\right)$. Seu $\frac{a}{\beta} x^{\frac{a\beta-a\alpha+b\beta}{a}} s = \int x^{\frac{a\beta+b\beta-a}{a}} dx \left(\frac{1-x^{n\beta}}{1-x^{\beta}}\right)$ vel $s = \frac{\beta}{a} x^{\frac{a\alpha-a\beta-b\beta}{a}} \int x^{\frac{a\beta+b\beta-a}{a}} dx \left(\frac{1-x^{n\beta}}{1-x^{\beta}}\right)$. In hac formula integrale ita debet accipi vt poſito $x = o$, ipſum euaneſcat. Si deſideretur ſumma ſeriei propoſitae in infinitum continuatae, fiet $n = \infty$ et $s = \frac{\beta}{a} x^{\frac{a\alpha-a\beta-\beta b}{a}} \int \frac{x^{\frac{a\beta+b\beta-a}{a}} dx}{1-x^{\beta}}$. Si ſit $x = 1$. in expreſſione quidem ſumma s, quia differentialia inſunt, non poteſt poni $x = 1$, ſed poſt integrationem fiat $x = 1$. Attamen perinde eſt

eſt quales numeri loco α et β ſubſtituantur, ſit igitur $\alpha = \beta = 1$. Erit $s = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{2a+b} - - - + \frac{1}{na+b} = \frac{1}{a x^{\frac{a}{b}}} \int x^{\frac{b}{a}} dx \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)$. Atque poſt integrationem fieri debet $x = 1$. Quemadmodum in diſſertatione de ſummationibus initio citata inueneram.

§. 10. Sit propoſita progreſſio, cuius terminus ordine n eſt $\frac{x^n}{(an+b)(cn+e)}$, aſſumo hic tantum x^n loco $x^{\alpha+(n-1)\beta}$ tum compendii ergo, tum quia haec potentia in illam facili negotio poteſt transmutari. Sit terminus ſummatorius s, erit $px^n s = \frac{px^{n+1}}{(a+b)(c+e)} + - - - - - + \frac{px^{n+n}}{(an+b)(cn+e)}$. Adeoque $\frac{\text{diff: } px^n s}{dx} = = \frac{p(n+1)x^n}{(a+b)(c+e)} + - - - - - \frac{p(n+n)x^{n+n-1}}{(an+b)(cn+e)}$. Fiat $pn + pn = an + b$, erit $p = a$ et $n = \frac{b}{a}$. Ergo habetur $\frac{a\,d(x^{\frac{b}{a}} s)}{dx} = \frac{x^{\frac{b}{a}}}{c+e} + - - - - - + \frac{x^{\frac{b}{a}+n-1}}{cn+e}$. Multiplicetur denuo per px^n, erit $\frac{apx^n d(x^{\frac{b}{a}} s)}{dx} = \frac{px^{\frac{b}{a}+n}}{c+e} + - - - - - + \frac{px^{\frac{b}{a}+n+n-1}}{cn+e}$. Hincque prodit $\frac{apd(x^n d(x^{\frac{b}{a}} s))}{dx} = \frac{p(\frac{b}{a}+n)x^{\frac{b}{a}+n-1}}{c+e} + - - - + \frac{p(\frac{b}{a}+n+n-1)x^{\frac{b}{a}+n+n-2}}{cn+e}$

Fiat $\frac{pb}{a}+pn+p\pi-p=cn+e$; erit $p=c$ et $\pi=1-\frac{b}{a}+\frac{e}{c}$. His ſubſtitutis emerget iſta aequatio $\frac{acd(x^{1-\frac{b}{a}+\frac{e}{c}}d(x^{\frac{b}{a}}s))}{dx^2}=x^{\frac{e}{c}}+\cdots+x^{\frac{e}{c}+n-1}=x^{\frac{e}{c}}\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)$

Sumantur iterum integralia, erit $\frac{acx^{1-\frac{b}{a}+\frac{e}{c}}d(x^{\frac{b}{a}}s)}{dx}=\int x^{\frac{e}{c}}dx\left(\frac{1-x}{1-x}\right)$: hincque $s=\frac{1}{acx^{\frac{b}{a}}}\int x^{\frac{b}{a}-\frac{e}{c}-1}dx\int x^{\frac{e}{c}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)=\frac{x^{\frac{b}{a}-\frac{e}{c}}\int x^{\frac{e}{c}}dx(\frac{1-x}{1-x})^n-\int x^{\frac{b}{a}}dx(\frac{1-x}{1-x})^n}{(bc-ae)x^{\frac{b}{a}}}$. Caſus hic notandus eſt, ſi $bc=ae$, quo fit $s=\frac{0}{0}$. Erit autem iuxta priorem formam $s=\frac{1}{acx^{\frac{b}{a}}}\int\frac{dx}{x}\int x^{\frac{b}{a}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)$ quae mutatur in hanc $s=\frac{lx\int x^{\frac{b}{a}}dx(\frac{1-x}{1-x})^n-\int x^{\frac{b}{a}}dx(\frac{1-x}{1-x})^n/x}{acx^{\frac{b}{a}}}$

Caſus hic accidit, ſi denominatores $(an+b)(cn+e)$ fuerint quadrata vel horum quaedam multipla. Si fuerit $x=1$, haec ſubſtitutio vt ante demum poſt integrationem fieri debet in quantitatibus ſigua integralia prae ſe habentibus, at in finitis ſtatim fieri poteſt $x=1$. Erit ergo $s=\frac{\int(x^{\frac{e}{c}}-x^{\frac{b}{a}})dx(\frac{1-x}{1-x})^n}{bc-ae}$. Ex quo apparet ſi $x^{\frac{e}{c}}-x^{\frac{b}{a}}$ poteſt diuidi per $1-x$ ſummam progreſſionis eſſe algebraicam. At caſu quo $bc=ae$, fiet $lx=0$,

$=o$, ſi ſcilicet ſit $x=1$. Quocirca erit $s=\frac{\int x^{\frac{b}{a}} dx \left(\frac{1-x}{1-x}\right)^n lx}{ac}$.

§. 11. Simili modo intelligitur ſi n in denominatore 3 pluresue dimenſiones habeat, quomodo ſummam inueniri oporteat, ita vt opus non ſit pluribus exemplis operationem illuſtrare. Sit progreſſio propoſita haec cuius terminus generalis eſt $\frac{x^n}{(an+b)(cn+e)(fn+g)}$ ſumma huius ſit s. Haec progreſſio eodem, quo praec. cedente §. modo tractata dabit poſt duas differentiones $\frac{acd(x^{1-\frac{b}{a}+\frac{e}{c}} d(x^{\frac{b}{a}} s))}{dx^2} = \frac{x^{\frac{e}{c}}}{f+g} + \cdots\cdots + \frac{x^{\frac{e}{c}+n-1}}{nf+g}$ $=$ (p. §. 9.) $\frac{1}{f} x^{\frac{e}{c}-\frac{g}{f}-1} \int x^{\frac{f}{g}} dx \left(\frac{1-x}{1-x}\right)^n$ ſumantur integralia erit $\frac{acf x^{1-\frac{a}{b}+\frac{e}{c}} d(x^{\frac{b}{a}} s)}{dx} = \int x^{\frac{e}{c}-\frac{g}{f}-1} dx \int x^{\frac{g}{f}} dx \left(\frac{1-x}{1-x}\right)^n$, et denuo $acf x^{\frac{b}{a}} s = \int x^{\frac{b}{a}-\frac{e}{c}-1} dx \int x^{\frac{e}{c}-\frac{g}{f}-1} dx \int x^{\frac{g}{f}} dx \left(\frac{1-x}{1-x}\right)^n$, adeoque $s = \frac{1}{acf x^{\frac{b}{a}}} \int x^{\frac{b}{a}-\frac{e}{c}-1} dx \int x^{\frac{e}{c}-\frac{g}{f}-1} dx \int x^{\frac{g}{f}} dx \left(\frac{1-x}{1-x}\right)^n$. Ne plura ſigna integralia poſt ſe inuicem ſint poſita, haec forma in ſequentem transmutari poteſt $s = \frac{fx^{-\frac{g}{f}} \int x^{\frac{g}{f}} dx \left(\frac{1-x}{1-x}\right)^n}{(bf-ag)(ef-cg)} + \frac{cx^{-\frac{e}{c}} \int x^{\frac{e}{c}} dx \left(\frac{1-x}{1-x}\right)^n}{(bc-ae)(cg-ef)} +$

$+\frac{ax^{-\frac{b}{a}}\int x^{\frac{b}{a}}dx\left(\frac{1-x}{1-x}\right)^n}{(ae-bc)(ag-bf)}$. Ex hoc ſimul apparet, ſi plures fuerint factores in termino generali, quam formam habitura ſit ſumma. Sit enim terminus generalis $\frac{x^n}{(an+b)(cn+e)(fn+g)(hn+k)}$ erit terminus ſummatorius $s=\frac{1}{acfhx^{\frac{b}{a}}}\int x^{\frac{b}{a}-\frac{e}{c}-1}dx\int x^{\frac{e}{c}-\frac{g}{f}-1}dx\int x^{\frac{g}{f}-\frac{k}{h}-1}$

$dx\int x^{\frac{k}{h}}dx\left(\frac{1-x}{1-x}\right)^n=\frac{ax^{-\frac{b}{a}}\int x^{\frac{b}{a}}dx\left(\frac{1-x}{1-x}\right)^n}{(ae-bc)(ag-bf)(ak-bh)}+$

$\frac{cx^{-\frac{e}{c}}\int x^{\frac{e}{c}}dx\left(\frac{1-x}{1-x}\right)^n}{(bc-ae)(cg-ef)(ck-eh)}+\frac{fx^{-\frac{g}{f}}\int x^{\frac{g}{f}}dx\left(\frac{1-x}{1-x}\right)^n}{(bf-ag)(cf-cg)(fk-gk)}$

$+\frac{kx^{-\frac{k}{h}}\int x^{\frac{k}{h}}dx\left(\frac{1-x}{1-x}\right)^n}{(bh-ak)(eh-ck)(gh-fk)}$. Si deſideretur ſumma caſu, quo $x=1$. erit pro termino generali $\frac{1}{(an+b)(cn+e)(fn+g)}$ terminus ſummatorius $s=\frac{\int dx\left(\frac{1-x}{1-x}\right)^n\left((aef-bcf)x^{\frac{g}{f}}+(bcf-acg)x^{\frac{e}{c}}+(acg-aef)x^{\frac{b}{a}}\right)}{(ae-bc)(ag-bf)(cg-cf)}$. Quoties igitur quantitas in $dx\left(\frac{1-x}{1-x}\right)^n$ ducta dividi poteſt per $1-x$ tunc progreſſio propoſita algebraicam habet ſummam. Accidit hoc ſi $\frac{b}{a}-\frac{e}{c}$ et $\frac{e}{c}-\frac{g}{f}$ ſunt numeri integri. Praeterea hoc etiam eſt notandum omnes huiusmodi progreſſiones vel algebraice eſſe ſummabiles, vel a logarithmis ſiue realibus

libus ſiue imaginariis pendere, neque vllam aliam quadraturam huiusmodi progreſſione poſſe exprimi.

§. 12. At cum difficile ſit has formulas ad eos caſus accommodare, quibus denominatorum factores ſunt aequales, libet hic hos caſus in ſpecie tractare: ſit itaque progreſſionis ſummandae terminus generalis $\frac{x^n}{(an+b)^3}$ et ſummatorius s, erit $s = \frac{1}{a^3 x^{\frac{b}{a}}} \int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{x} \int x^{\frac{b}{a}} dx \left(\frac{1-x}{1-x}\right)^n$ id quod ſequitur ex §. 11. vbi ſit $c = f = a$ et $e = g = b$: haec forma transmutata abit in hanc $s = \frac{\frac{1}{2}(lx)^2 \int x^{\frac{b}{a}} dx \left(\frac{1-x}{1-x}\right)^n}{a^3 x^{\frac{b}{a}}} - \frac{lx \int x^{\frac{b}{a}} dx lx \left(\frac{1-x}{1-x}\right)^n}{a^3 x^{\frac{b}{a}}} + \frac{\frac{1}{2} \int x^{\frac{b}{a}} dx \left(\frac{1-x}{1-x}\right)^n (lx)^2}{a^3 x^{\frac{b}{a}}}$. Si autem fuerit terminus generalis $\frac{x^n}{(an+b)^4}$, erit $s = \frac{(lx)^3 \int x^{\frac{b}{a}} dx \left(\frac{1-x}{1-x}\right)^n - 3(lx)^2 \int x^{\frac{b}{a}} dx lx \left(\frac{1-x}{1-x}\right)^n + 3lx \int x^{\frac{b}{a}} dx (lx) \left(\frac{1-x}{1-x}\right)^n - \int x^{\frac{b}{a}} dx (lx)^3 \left(\frac{1-x}{1-x}\right)^n}{6 a^4 x^{\frac{b}{a}}}$

Ex his apparet quomodo pro reliquis potentiis valor ipſius s progrediatur: generaliter enim ſi terminus generalis eſt $\frac{x^n}{(an+b)^m}$, erit ſumma $s = \frac{(lx)^{m-1} \int x^{\frac{b}{a}} dx \left(\frac{1-x}{1-x}\right)^n - \left(\frac{m-1}{1}\right)(lx)^{m-2} \int x^{\frac{b}{a}} dx lx \left(\frac{1-x}{1-x}\right)^n + \left(\frac{m-1}{1}\right)\left(\frac{m-2}{2}\right)(lx)^{m-3} \int x^{\frac{b}{a}} dx (lx)^2 \left(\frac{1-x}{1-x}\right)^n - \text{etc.}}{1.2.3.\cdots\cdots (m-1) a^m x^{\frac{b}{a}}}$

$-$etc. Valores hi multo fiunt fimpliciores, fi ponatur $x=1$, erit enim $lx=o$. Termino generali enim $\frac{1}{(an+b)^2}$ reſpondet hic ſummatorius $\frac{\int x^{a-1}dx(l\frac{1}{x})(\frac{1-x^n}{1-x})}{1.a^2}$: termino generali $\frac{1}{(an+b)^3}$ hic $\frac{\int x^{a-1}dx(l\frac{1}{x})^2(\frac{1-x^n}{1-x})}{1.2.a^3}$; atque termino generali $\frac{1}{(an+b)^m}$ hic $\frac{\int x^{a-1}dx(l\frac{1}{x})^{m-1}(\frac{1-x^n}{1-x})}{1.2.3.\cdots(m-1)a^m} = \frac{\int x^{a-1}dx(l\frac{1}{x})^{m-1}(\frac{1-x^n}{1-x})}{a^m\int dx(l\frac{1}{x})^{m-1}}$; quae integralia ita debent accipi vt poſito $x=o$ tota ſumma euaneſcat, tum autem poni debet $x=1$, et quantitas reſultans vera erit ſumma. Porro notetur ſi ſumma deſideretur in infinitum continuatae progreſſionis, vbique tantum ſcribi debere $\frac{1}{1-x}$ loco $\frac{1-x^n}{1-x}$.

§. 13. Duae iam pertractatae ſunt progreſſionum claſſes, quarum illa habebat terminum generalem Ax^n haec vero $\frac{x^n}{A}$ denotante A quantitatem algebraicam ex n et conſtantibus conſtantem, ita tamen, vt n non habeat alios exponentes, niſi integros affirmatiuos. Ex his oritur tertia claſſis pro termino generali habens $\frac{Ax^n}{B}$, vbi A et B eiusdem modi quantitates algebraicas deſignant. Talis progreſſio reducitur etiam ad progreſſionem geometricam tollendo numeratorem A ope integrationis

tionis, et denominatorem B ope differentiationis, quemadmodum in vtraque pertractata seorsim factum est. Sit progressionis summandae terminus generalis $\frac{(\alpha n+\mathfrak{G})x}{(an+b)}^n$, huius terminus summatorius ponatur s; erit $s = \frac{(\alpha+\mathfrak{G})x}{a+b} + \text{-----} + \frac{(\alpha n+\mathfrak{G})x}{an+b}^n$. Multiplicetur haec aequatio per px^π, erit $px^\pi s = \frac{p(\alpha+\mathfrak{G})x}{a+b}^{\pi+1} + \text{-----} + \frac{p(\alpha n+\mathfrak{G})x}{an+b}^{n+\pi}$ sumantur differentialia, erit $pd(x^\pi s) = \frac{p(\pi+1)(\alpha+\mathfrak{G})x}{a+b}^{\pi} dx + \text{-----} + \frac{p(n+\pi)(\alpha n+\mathfrak{G})x}{an+b}^{n+\pi-1} dx$, fiat $pn+p\pi = an+b$, erit $p=a$ et $\pi=\frac{b}{a}$. Ergo est $ad(x^{\frac{b}{a}}s) = (\alpha+\mathfrak{G})x^{\frac{b}{a}} dx + \text{---} + (\alpha n+\mathfrak{G})x^{\frac{b+n-1}{a}} dx$. Multiplicetur denuo per px^π erit $apx^\pi d(x^{\frac{b}{a}}s) = p(\alpha+\mathfrak{G})x^{\frac{b+\pi}{a}} dx + \text{-----} + p(\alpha n+\mathfrak{G})x^{\frac{b+\pi+n-1}{a}} dx$. Sumantur integralia habebitur $ap\int x^\pi d(x^{\frac{b}{a}}s) = \frac{ap(\alpha+\mathfrak{G})x^{\frac{b+\pi+1}{a}}}{b+a\pi+a} + \text{---} + \frac{ap(\alpha n+\mathfrak{G})x^{\frac{b+\pi+n}{a}}}{b+a\pi+an}$ Fiat $a\alpha pn+a\mathfrak{G}p = an+a\pi+b$; erit $p=\frac{1}{\alpha}$ et $\pi = \frac{\mathfrak{G}}{\alpha}-\frac{b}{a}$. Propterea est $\frac{a}{\alpha}\int x^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}-\frac{b}{a}} d(x^{\frac{b}{a}}s) = x^{\frac{\mathfrak{G}+1}{\alpha}} + \text{---} + x^{\frac{\mathfrak{G}+n}{\alpha}} = x^{\frac{\mathfrak{G}+1}{\alpha}}\left(\frac{1-x}{1-x}\right)^n$. Ex hac aequatione prodit $s = \frac{\alpha\int x^{\frac{a}{\alpha}-\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}} d\left(x^{\frac{\mathfrak{G}+\alpha}{\alpha}}\left(\frac{1-x}{1-x}\right)^n\right)}{ax^{\frac{b}{a}}}$. Si fuerit terminus generalis $\frac{(\alpha n+\mathfrak{G})(\gamma n+\delta)x}{an+b}^n$, huiusque summatorius ponatur s, prodibit

dibit iisdem, quibus modo, absolutis operationibus, $\frac{a}{\alpha}$ $\int x^{\frac{\varepsilon}{\alpha}-\frac{b}{a}} d\left(x^{\frac{b}{a}} s\right) = (\gamma+\delta) x^{\frac{\varepsilon}{\alpha}} + \cdots\cdots + (\gamma n+\delta) x^{\frac{\varepsilon}{\alpha}+n}$, multiplicetur iterum per $px^{\pi}dx$ et sumantur integralia, prodibit $\frac{ap}{\alpha}\int x^{\pi}dx\int x^{\frac{\varepsilon}{\alpha}-\frac{b}{a}} d\left(x^{\frac{b}{a}} s\right) = \frac{ap.\gamma+\delta}{\varepsilon+\alpha\pi+2\alpha} x^{\frac{\varepsilon}{\alpha}+\pi+2} + \cdots\cdots + \frac{ap(\gamma n+\delta)}{\varepsilon+\alpha\pi+\alpha n+\alpha} x^{\frac{\varepsilon}{\alpha}+\pi+n+1}$. Fiat $\alpha\gamma pn + \alpha\delta p = \alpha+\varepsilon+\alpha\pi+\alpha n$, erit $p = \frac{1}{\gamma}$ et $\pi = \frac{\delta}{\gamma} - \frac{\varepsilon+1}{\alpha}$ Ergo $\frac{a}{\alpha\gamma}\int x^{\frac{\delta}{\gamma}-\frac{\varepsilon}{\alpha}-1} dx \int x^{\frac{\varepsilon}{\alpha}-\frac{b}{a}} d\left(x^{\frac{b}{a}} s\right) = x^{\frac{\delta}{\gamma}+1} + \cdots + x^{\frac{\delta}{\gamma}+n} = x^{\frac{\delta}{\gamma}+1}\left(\frac{1-x}{1-x}\right)^{n}$. Quare $s = \frac{\alpha\gamma \int x^{\frac{b}{a}-\frac{\varepsilon}{\alpha}} d\left(x^{\frac{\varepsilon}{\alpha}-\frac{\delta}{\gamma}+1}\right) d\left(x^{\frac{\delta}{\gamma}+1}\left(\frac{1-x}{1-x}\right)^{n}\right)}{a x^{\frac{b}{a}} dx}$

Sed huiusmodi progressionibus summandis diutius non immoror, sufficit enim methodum tradidisse, qua omnes summari possint. Interim tamen et id valet, quod §. 11. dixi, omnes scilicet huiusmodi progressiones vel algebraice posse summari, vel summam a logarithmis siue realibus siue imaginariis pendere.

§. 14. Progredior nunc ad aliud progressionum genus, quarum termini generales algebraice exprimi non possunt, sed quae ad classem serierum hypergeometricarum pertinent. Huiusmodi series est $(\alpha+\varepsilon)x + (\alpha+\varepsilon)(2\alpha+\varepsilon)x^2 + \cdots\cdots (\alpha+\varepsilon)(2\alpha+\varepsilon)\cdots\cdots(n\alpha+\varepsilon)x^n$. Ponatur huius summa s, et multiplicetur per px^{π}, erit $px^{\pi}s = p(\alpha+\varepsilon)x^{\pi+1} + \cdots\cdots + p(\alpha+\varepsilon)\cdots(2\alpha+\varepsilon)$

$(2\alpha+\mathfrak{G})$ - - - - - $(\alpha n+\mathfrak{G})x^{n+\pi}$. Et huius in dx ductae integralis $p\int x^{\pi} s\,dx = \frac{p(\alpha+\mathfrak{G})x^{\pi+2}}{\pi+2}$ + - - - - - - + $\frac{p(\alpha+\mathfrak{G})(2\alpha+\mathfrak{G})\text{ - - - - }(\alpha n+\mathfrak{G})x^{n+\pi+1}}{n+\pi+1}$, fiat $p\alpha n+p\mathfrak{G} = n+\pi+1$ erit $p=\frac{1}{\alpha}$ et $\pi=\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}-1$. Vnde prodit $\frac{1}{\alpha}\int x^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}-1} s\,dx = x^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}+1} + (\alpha+\mathfrak{G})x^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}+2}$ + - - + $(\alpha+\mathfrak{G})(2\alpha+\mathfrak{G})$ - - - - $(\alpha n-1)+\mathfrak{G}\,x^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}+n}$. Diuidatur per $x^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}+1}$ habebitur $\frac{\int x^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}-1} s\,dx}{\alpha x^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}+1}} - 1 = (\alpha+\mathfrak{G})x +$ - - - - - $(\alpha+\mathfrak{G})(2\alpha+\mathfrak{G})$ - - - $\alpha(n-1)+\mathfrak{G}\,x^{n-1}$. Quae est ipsa progressio proposita truncata termino vltimo. Erit igitur $\frac{\int x^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}-1} s\,dx}{\alpha x^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}+1}} - 1 = s-(\alpha+\mathfrak{G})(2\alpha+\mathfrak{G})$ - - - - $(\alpha n+\mathfrak{G}) = s-\mathrm{A}$. Huiusmodi autem formas finita expressione exposui in alia iam praelecta dissertatione de terminis generalibus progressionum transcendentalium, ex qua si libet finitus valor loco A desumi potest. Erit ergo $\int x^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}-1} s\,dx = \alpha x^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}+1} + \alpha x^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}+1} s - \alpha\mathrm{A}\,x^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}+n+1}$, atque $x^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}-1} s\,dx = (\alpha+\mathfrak{G})x^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}}dx + (\alpha+\mathfrak{G})x^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}}s\,dx + \alpha x^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}+1} ds$ $-(\alpha+\mathfrak{G}+\alpha n)\mathrm{A}x^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}+n} dx$ seu $s\,dx = (\alpha+\mathfrak{G})x\,dx +$ $(\alpha+\mathfrak{G})x\,s\,dx + \alpha x^2 ds - (\alpha+\mathfrak{G}+\alpha n)\mathrm{A}x^{n+1} dx$. Ex qua aequatione valor ipsius s eruitur dabit summam progressionis propositae. Fieri etiam potest, vt factores in termino sequente non vno tantum, sed duobus plu-

ribusue augeantur. Accedant ſemper duo de nouo, vt prodeat iſta progreſſio $(\alpha+\mathfrak{G})x+(\alpha+\mathfrak{G})(2\alpha+\mathfrak{G})(3\alpha+\mathfrak{G})x^2+\text{----}+(\alpha+\mathfrak{G})(2\alpha+\mathfrak{G})\text{---}(\alpha(2n-1)+\mathfrak{G})x^n$. Huius ſumma vocetur s, erit $p\int x^\pi s\,dx = \frac{p(\alpha+\mathfrak{G})x^{\pi+2}}{\pi+2}+\text{----}+\frac{p(\alpha+\mathfrak{G})(2\alpha+\mathfrak{G})\text{---}p(\alpha(2n-1)+\mathfrak{G})x^{n+\pi+1}}{\pi+1}$. Fiat $2p\alpha n-p\alpha+p\mathfrak{G}=n+\pi+1$ erit $p=\frac{1}{2\alpha}$, et $\pi=\frac{\mathfrak{G}-3\alpha}{2\alpha}$. Vnde $\frac{\int x^{\frac{\mathfrak{G}-3\alpha}{2\alpha}}s\,dx}{2\alpha} = x^{\frac{\mathfrak{G}+\alpha}{2\alpha}}+\text{----}+(\alpha+\mathfrak{G})(2\alpha+\mathfrak{G})\text{---}(\alpha(2n-2)+\mathfrak{G})x^{n+\frac{\mathfrak{G}-\alpha}{2\alpha}}$. Atque iterum $\frac{p\int x^\pi dx\int x^{\frac{\mathfrak{G}-3\alpha}{2\alpha}}s\,dx}{2\alpha} = \frac{2\alpha p x^{\frac{\mathfrak{G}+3\alpha}{2\alpha}+\pi}}{\mathfrak{G}+3\alpha+2\alpha\pi}+\text{------}+\frac{2\alpha p(\alpha+\mathfrak{G})\text{-----}}{\mathfrak{G}+\alpha}\frac{(\alpha(2n-2)+\mathfrak{G})x^{n+\pi+\frac{\mathfrak{G}+\alpha}{2\alpha}}}{+2\alpha n+2\pi\alpha}$. Fiat $4p\alpha^2n-4p\alpha^2+2p\alpha\mathfrak{G}=2\alpha n+2\pi\alpha+\alpha+\mathfrak{G}$; erit $p=\frac{1}{2\alpha}$ et $\pi=\frac{\mathfrak{G}-2\alpha}{2\alpha}-\frac{\alpha-\mathfrak{G}}{2\alpha}=-\frac{3}{2}$, conſequenter $\frac{\int x^{-\frac{3}{2}}dx\int x^{\frac{\mathfrak{G}-3\alpha}{2\alpha}}s\,dx}{4\alpha^2x^{\frac{\mathfrak{G}}{2\alpha}}}-\frac{1}{\mathfrak{G}}=(\alpha+\mathfrak{G})x+\text{----}(\alpha+\mathfrak{G})(2\alpha+\mathfrak{G})\text{---}(\alpha(2n-3)+\mathfrak{G})x^{n-1}=s-Ax^n$ poſito $A=(\alpha+\mathfrak{G})(2\alpha+\mathfrak{G})\text{----}(\alpha(2n-1)+\mathfrak{G})$. Ex qua aequatione s innoteſcit.

§. 15. Simili modo operationem inſtitui oportet, ſi in coefficiente termini ſequentis, tres pluresue factores de nouo accedant. De quo notandum eſt,

eſt, tot ſemper in aequatione reſultante ſigna integralia ſibi inuicem eſſe iuncta quot ſunt factores, quibus ſequens quisque terminus augetur. Ita progreſſionis $(\alpha+\beta)x+\cdots+(\alpha+\beta)\cdots(\alpha(3n-2)+\beta)x^n$ ſumma s determinabitur ex hac aequatione $\frac{\int x^{-\frac{4}{3}}dx\int x^{-\frac{4}{3}}dx\int x^{\frac{\beta-5\alpha}{3\alpha}}s\,dx}{27\alpha^3 x^{\frac{\beta-\alpha}{3\alpha}}}$ $\frac{-1}{\beta(\beta-\alpha)}=s-(\alpha+\beta)\cdots(\alpha(3n-2)+\beta)x^n$. Ex qua, vt inductio ad ſequentes caſus fieri poſſit, notandum eſt, $\frac{1}{\beta(\beta-\alpha)}$ eſſe terminum progreſſionis propoſitae ante primum ſeu eum cuius index eſt 0. Si factores qui in potentias ipſius x ducuntur non conſtituant progreſſionem arithmeticam, ſed aliam algebraicam altioris ordinis, operatio ſimiliter debet inſtitui; vt ſit progreſſio propoſita $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)x+\cdots+(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)\cdots(\alpha n+\beta)(\gamma+\delta)(2\gamma+\delta)\cdots(\gamma n+\delta)x^n$ ponatur huius ſumma s, erit $p\int x^\pi s\,dx=\frac{p(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)x^{\pi+2}}{\pi+2}$ $+\cdots+\frac{p(\alpha+\beta)\cdots(\alpha n+\beta)(\gamma+\delta)\cdots(\gamma n+\delta)x^{n+\pi+2}}{n+\pi+1}$

Ponatur $p\gamma n+p\delta=n+\pi+1$; erit $p=\frac{1}{\gamma}$; et $\pi=\frac{\delta-\gamma}{\gamma}$. Ergo $\frac{\int x^{\frac{\delta-\gamma}{\gamma}}s\,dx}{\gamma}=(\alpha+\beta)x^{\frac{\delta+\gamma}{\gamma}}+\cdots$ $(\alpha+\beta)\cdots(\alpha n+\beta)(\gamma+\delta)\cdots(\gamma(n-1)+\delta)x^{\frac{n+\delta}{\gamma}}$

Porro erit $\frac{p\int x^\pi dx\int x^{\frac{\delta-\gamma}{\gamma}}s\,dx}{\gamma}=\frac{\gamma p(\alpha+\beta)x^{\frac{\delta+2\gamma}{\gamma}+\pi}}{\delta+2\gamma+\pi\gamma}$ $+\cdots+\frac{\gamma p(\alpha+\beta)\cdots(\alpha n+\beta)(\gamma+\delta)\cdots\gamma(n-1)+\delta)x^{n+\pi+\frac{\delta+\gamma}{\gamma}}}{\gamma n+\pi\gamma+\delta+\gamma}$

Fiat $p\alpha\gamma n+p\beta\gamma=\gamma n+\pi\gamma+\delta+\gamma$, erit $p=\frac{1}{\alpha}$, et

$\frac{1}{\alpha}$, et $p = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\delta}{\gamma} - 1 = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta - \alpha\gamma}{\alpha\gamma}$. Ergo

$$\frac{\int x^{\frac{\beta\gamma-\alpha\delta-\alpha\gamma}{\alpha\gamma}} dx \int x^{\frac{\delta-\gamma}{\gamma}} s\,dx}{\alpha\gamma} = x^{\frac{\beta+\alpha}{\alpha}} + \text{- - - - - +} (\alpha+\mathfrak{B})$$

$$\text{- - - - } (\alpha(n-1)+\mathfrak{B})(\gamma+\delta) \text{ - - - } (\gamma(n-1)+\delta) x^{\frac{\beta}{\alpha}+n}$$

Conſequenter $\frac{\int x^{\frac{\beta\gamma-\alpha\delta-\alpha\gamma}{\alpha\gamma}} dx \int x^{\frac{\delta-\gamma}{\gamma}} s\,dx}{\alpha\gamma x^{\frac{\beta+\alpha}{\alpha}}} - 1 = s - \mathrm{AB}x^n$.

Poſito $\mathrm{A} = (\alpha+\beta)$ - - $(\alpha n+\beta)$ et $\mathrm{B} = (\gamma+\delta)$ - - - $(\gamma n+\delta)$. Hic eſt caſus ſi progreſſionis, quam factores conficiunt terminus generalis eſt $(\alpha n+\beta)(\gamma n+\delta)$ ſeu $\alpha\gamma n^2 + (\alpha\delta+\beta\gamma)n + \beta\delta$. Comprehenduntur ergo ſub hac forma omnes progreſſiones ordinis ſecundi. Superior autem formula ex qua s determinatur transmutatur in hanc $\frac{\int x^{\frac{\delta-\gamma}{\gamma}} s\,dx}{(\beta\gamma-\alpha\delta)x^{\frac{\delta+\gamma}{\gamma}}} + \frac{\int x^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} s\,dx}{(\alpha\delta-\beta\gamma)x^{\frac{\beta+\alpha}{\alpha}}} = 1 + s - \mathrm{AB}x^n$. Ex qua facilius forma ſequentium intelligi poteſt.

§. 16. Conſiderabo nunc harum ſerierum reciprocas, in quibus potentiae ipſius x ſunt diuiſae per id, per quod ante erant multiplicatae. Sit igitur ſeries ſummanda haec $\frac{x}{\alpha+\beta} + \frac{x^2}{(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)} + \frac{x^3}{(\alpha+\beta)\text{- - -}(3\alpha+\beta)} + \text{- - - - - - +} \frac{x^n}{(\alpha+\beta)\text{- - - - -}(\alpha n+\beta)}$ huius ſumma ponatur s. Erit $\frac{pd(x^\pi s)}{dx} = \frac{p(\pi+1)x^\pi}{\alpha+\beta} + \frac{p(\pi+2)x^{\pi+1}}{(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)} + \text{- - - - - - +}$

$\frac{p(\pi+n)x^{\pi+n-1}}{(\alpha+\beta)\text{- - - - -}(\alpha n+\beta)}$. Fiat $pn + p\pi = \alpha n + \beta$, erit $p = \alpha$, et $\pi = \frac{\alpha}{\beta}$. Quamobrem erit $\frac{\alpha d(x^{\frac{\alpha}{\beta}} s)}{dx} = x^{\frac{\alpha}{\beta}} + \frac{x^{\frac{\alpha}{\beta}+1}}{\alpha+\beta}$

+ - -

$$+\cdots\cdots+\frac{x^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}+n-1}}{(\alpha+\mathfrak{G})(2\alpha+\mathfrak{G})\cdots(\alpha(n-1)+\mathfrak{G})}.$$ Et

propterea $\frac{\alpha d(x^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}} s)}{x^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}} dx} = 1 + s - \frac{x^n}{A}$ posito vt ante $A = (\alpha+\mathfrak{G})\cdots\cdots(\alpha n+\mathfrak{G})$. Aequatio haec euoluta praebit $\alpha x^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}} ds + \mathfrak{G} x^{\frac{\mathfrak{G}-\alpha}{\alpha}} s\,dx = \alpha^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}} dx + x^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}} s dx - \frac{x^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}+n}}{A} dx$ quae diuisa per $\alpha^{\frac{\mathfrak{G}-1}{\alpha}}$ transit in $\alpha x\,ds + \mathfrak{G} s\,dx = x\,dx + x s\,dx - \frac{x^{n+1} dx}{A}$, seu $ds + \frac{\mathfrak{G} s\,dx}{\alpha x} - \frac{s dx}{\alpha} = \frac{dx}{\alpha} - \frac{x^n dx}{A\alpha}$.

Multiplicetur haec aequatio per $c^{\frac{x}{\alpha}} x^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}}$, vbi c est numerus, cuius log. est 1, fiet ea integrabilis, prodibitque $c^{\frac{-x}{\alpha}} x^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}} s = \frac{1}{\alpha}\int c^{\frac{-x}{\alpha}} x^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}} dx (1 - \frac{x}{A})^n$. Atque $s = \frac{1}{\alpha} c^{\frac{-x}{\alpha}} x^{\frac{-\mathfrak{G}}{\alpha}} \int c^{\frac{-x}{\alpha}} x^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}} dx (1 - \frac{x}{A})^n$. Huius progressionis in infinitum continuatae summa igitur erit $\frac{1}{\alpha} c^{\frac{x}{\alpha}} x^{\frac{-\mathfrak{G}}{\alpha}} \int c^{\frac{-x}{\alpha}} x^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}} dx = \mathfrak{G}(\mathfrak{G}-\alpha)(\mathfrak{G}-2\alpha)\cdots\cdots$
$\alpha c^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}} x^{\frac{-\mathfrak{G}}{\alpha}} - 1 - \frac{\mathfrak{G}}{x} - \frac{\mathfrak{G}(\mathfrak{G}-\alpha)}{x^2} - \cdots\cdots - \frac{\mathfrak{G}(\mathfrak{G}-\alpha)\cdots\alpha}{x^{\frac{\mathfrak{G}}{\alpha}}}$

si fuerit $\mathfrak{G} = o$, erit summa $= c^{\alpha} - 1$. Sin sit $\mathfrak{G} = \alpha$ erit summa $= \frac{\alpha c^{\frac{x}{\alpha}}}{x} - 1 - \frac{\alpha}{x}$. Si vero ponatur $\mathfrak{G} = 2\alpha$. summa seriei erit $\frac{2\alpha^2 c^{\frac{\alpha}{\alpha}}}{x^2} - 1 - \frac{2\alpha}{x} - \frac{2\alpha^2}{x^2}$; et ita porro.

Ex quo intelligitur, quoties $\mathfrak{G}$ sit multiplum ipsius α, summam seriei finita et integrata expressione exhiberi

poſſe. Si autem $\frac{\mathfrak{C}}{\alpha}$ euadat fractio formula inuenta integrari non poteſt.

§. 17. Creſcat terminus quisque duobus factoribus, habebitur progreſſio haec $\frac{x}{(\alpha+\mathfrak{C})} + \frac{x^2}{(\alpha+\mathfrak{C})\cdots(3\alpha+\mathfrak{C})} +$
$+ \frac{x^3}{(\alpha+\mathfrak{C})\cdots(5\alpha+\mathfrak{C})} + \cdots + \frac{x^\pi}{(\alpha+\mathfrak{C})\cdots(\alpha(2n-1)+\mathfrak{C})}$
cuius ſumma ponatur s. Erit $\frac{p\,d(x^\pi s)}{dx} = \frac{p(\pi+1)x^\pi}{\alpha+\mathfrak{C}}$
$+ \frac{p(\pi+2)x^{\pi+1}}{(\alpha+\mathfrak{C})\cdots(3\alpha+\mathfrak{C})} + \cdots + \frac{p(\pi+n)x^{\pi+n-1}}{(\alpha+\mathfrak{C})\cdots(\alpha(2n-1)+\mathfrak{C})}$
ſit $p\pi+pn = 2\alpha n-\alpha+\mathfrak{C}$, erit $p = 2\alpha$ et $\pi = \frac{\mathfrak{C}-\alpha}{2\alpha}$
Idcirco $\frac{2\alpha d(x^{\frac{\mathfrak{C}-\alpha}{2\alpha}}s)}{dx} = x^{\frac{\mathfrak{C}-\alpha}{2\alpha}} + \frac{x^{\frac{\mathfrak{C}+\alpha}{2\alpha}}}{(\alpha+\mathfrak{C})(2\alpha+\mathfrak{C})} + \cdots$
$+ \frac{x^{\frac{\mathfrak{C}-3\alpha+\pi}{2\alpha}}}{(\alpha+\mathfrak{C})\cdots(\alpha(2n-2)+\mathfrak{C})}$. Atque iterum
$\frac{2\alpha p d\,x^\pi\, d(x^{\frac{\mathfrak{C}-\alpha}{2\alpha}}s)}{dx^2} = \frac{p(\mathfrak{C}-\alpha+2\alpha\pi)}{2\alpha}x^{\frac{\mathfrak{C}-3\alpha}{2\alpha}+\pi} + \cdots$
$\cdots - \frac{p(\mathfrak{C}-3\alpha+2\alpha n+2\alpha\pi)x^{\frac{\mathfrak{C}-5\alpha}{2\alpha}+n+\pi}}{2\alpha(\alpha+\mathfrak{C})(2\alpha+\mathfrak{C})\cdots(\alpha(2n-2)+\mathfrak{C})}$. Fiat $p\mathfrak{C}$
$-3p\alpha+2p\alpha n+2p\alpha\pi = 4\alpha^2 n-4\alpha^2+2\alpha\mathfrak{C}$, erit
$p = 2\alpha$, et $\pi = \frac{1}{2}$. Vnde prodit $\frac{4\alpha^2 d(x^{\frac{1}{2}}d(x^{\frac{\mathfrak{C}-\alpha}{2\alpha}}s))}{dx^2}$
$= \mathfrak{C}x^{\frac{\mathfrak{C}-2\alpha}{2\alpha}} + \cdots + \frac{x^{\frac{\mathfrak{C}-4\alpha}{2\alpha}+n}}{(\alpha+\mathfrak{C})\cdots(\alpha,2n-3)+\mathfrak{C})}$
$= \mathfrak{C}x$

$$= \mathfrak{C} x^{\frac{\mathfrak{e}-2\alpha}{2\alpha}} + x^{\frac{\mathfrak{e}-2\alpha}{2\alpha}} s - \frac{x^{\frac{\mathfrak{e}-2\alpha}{2\alpha}+n}}{(\alpha+\mathfrak{C})\text{----}(\alpha(2n-1)+\mathfrak{C})}$$

Simili modo operatio eſt inſtituenda, ſi terminus quisque pluribus factoribus in denominatore creſcat. Nec non ſatis apparet, ſi progreſſio, quam factores denominatorum conſtituunt, non fuerit arithmetica ſed algebraica altioris ordinis, quomodo ad aequationem, ex qua ſumma determinatur, perueniri oporteat. Scilicet quilibet factor in factores ſimplices eſt reſoluendus, vt §. 15. factum eſt, vbi terminus generalis factorum eſt $(\alpha n + \mathfrak{C})(\gamma n + \delta)$, qui omnes aequationes ordinis ſecundi ſub ſe complectitur. At ne hoc quidem opus eſt ſi ſequenti modo operati libuerit. Vt propoſita ſit pro-

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.7} + \frac{x^3}{1.7.17.} + \frac{x^4}{1.7.17.31.} + \text{-----}$$

$\frac{x^n}{1.7.\text{----}(2n-1)}$, ſumma huius ponatur s, erit $\frac{p\,d(x^\pi s)}{dx}$

$= p(\pi+1)x^\pi + \text{-----} \frac{p(\pi+n)x^{n+\pi-1}}{1.7\text{---}(2n^2-1)}$. Atque de-

inde $\frac{p\,d(x^\rho d(x^\pi s))}{dx^2} = p(\pi+1)(\pi+\varsigma)x^{\pi+\rho-1} +$

$\text{-----} + \frac{p(\pi+n)(n+\pi+\varsigma-1)x^{n+\pi+\rho-2}}{1.7\text{----}(2n^2-1)}$: Fiat

$pn^2 + 2p\pi n + p\varsigma n - pn + p\pi^2 + p\pi\varsigma - p\pi = 2n^2 - 1$, erit $p = 2$; $4\pi + 2\varsigma - 2 = 0$ ſeu $\varsigma = 1 - 2\pi$. Atque $-2\pi^2 = -1$ ſeu $\pi = \sqrt{\frac{1}{2}}$ et $\varsigma = 1 - \sqrt{2}$. Quare habebitur $\frac{2\,d(x^{1-\sqrt{2}}\,d(x^{\sqrt{\frac{1}{2}}}s))}{dx^2} = x^{-\sqrt{\frac{1}{2}}} + \text{----} +$

$$\frac{x^{\frac{2n-2-\sqrt{2}}{2}}}{1.7\cdots(2n^2-4n+1)} = x^{\frac{-\sqrt{2}}{2}} + x^{\frac{-\sqrt{2}}{2}}\left(s - \frac{x^n}{1.7.\cdots(2n^2-1)}\right)$$

. Summa vero huius ſerici in infinitum inuenietur ex hac aequatione $x^{-\sqrt{2}}dx^{\frac{\sqrt{1}}{2}}s) + 2x^{1\sqrt{2}}dd(x^{\frac{\sqrt{1}}{2}}s) = (2-2\sqrt{2})x^{\frac{-\sqrt{2}}{2}}dxds + (\sqrt{2}-2)x^{\frac{-2-\sqrt{2}}{2}}sdx^2 + 2x^{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}ddx + 2\sqrt{2}x^{\frac{-\sqrt{2}}{2}}dsdx + (1-\sqrt{2})x^{\frac{-2-\sqrt{2}}{2}}sdx^2 = x^{\frac{-\sqrt{2}}{2}}dx^2 + x^{\frac{-\sqrt{2}}{2}}sdx^2 = 2x^{\frac{-\sqrt{2}}{2}}dsdx - x^{\frac{-2-\sqrt{2}}{2}}sdx^2 + 2x^{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}dds$. Seu $2xdds - \frac{sdx^2}{x} + 2dsdx = dx^2 + sdx^2$, ex qua aequatione irrationalia omnia emanuere.

§. 18. Si factores denominatorum conſtituant progreſſionem potentiarum, huiusmodi progreſſionum ſummas inueſtigabo: vt ſit progreſſio propoſita $\frac{x}{(\alpha+\beta)^2} + \frac{x^2}{(\alpha+\beta)^2(2\alpha+\beta)^2} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{(\alpha+\beta)^2\cdots(n\alpha+\beta)^2}$ ponatur ſumma s, erit $pd\frac{(x^\pi s)}{dx} = \frac{p(\pi+1)x^\pi}{(\alpha+\beta)^2} + \cdots + \frac{p'(\pi+n)x^{n+\pi-1}}{(\alpha+\beta)^2\cdots(n\alpha+\beta)^2}$, fiat $p\pi + pn = \alpha n + \beta$, erit $p = \alpha$ et $\pi = \frac{\beta}{\alpha}$. Propterea $\frac{\alpha d(x^{\frac{\beta}{\alpha}}s)}{\alpha dx} = \frac{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}{(\alpha+\beta)} + \cdots\cdots + \frac{x^{\frac{\beta}{\alpha}+n-1}}{(\alpha+\beta)^2\cdots(n\alpha+\beta)}$. Porro

αpd

$\frac{\alpha p d(x^{\pi} d(x^{\frac{\beta}{\alpha}} s))}{dx^2} - \frac{p(\beta+\alpha\pi) x^{\frac{\beta}{\alpha}+\pi-1}}{\alpha(\alpha+\beta)} + \text{----} +$

$\frac{p(\beta+\alpha\pi+\alpha n-\alpha) x^{\frac{\beta}{\alpha}+\pi+n-2}}{\alpha(\alpha+\beta)^2 \text{----} (\alpha n+\beta)}$. Fiat $p\alpha n+p\beta+p\alpha\pi-p\alpha=a^2 n+\alpha\beta$. Ergo $p=a$, et $\pi=\frac{\alpha}{\alpha}=1$. Vnde eſt $\frac{a^2 d(x d x^{\frac{\beta}{\alpha}} s))}{dx^2} = x^{\frac{\beta}{\alpha}} + \text{----------} +$

$\frac{x^{\frac{\beta}{\alpha}+n-1}}{(\alpha+\beta)^2 \text{----} (\alpha(n-1)+\beta)^2} = x^{\frac{\beta}{\alpha}} + x^{\frac{\beta}{\alpha}}\left(s - \frac{x^n}{(\alpha+\beta)^2 \text{----} (\alpha n+\beta)^2}\right)$. Et ſumma progreſſionis in infinitum determinabitur aequatione $\frac{\alpha^2 d(x d(x^{\frac{\beta}{\alpha}} s))}{x^{\frac{\beta}{\alpha}} dx^2} = 1+s$. Similiter ſi factores fuerint cubi ſumma progreſſionis $\frac{x}{(\alpha+\beta)^3} + \frac{x^2}{(\alpha+\beta)^3(2\alpha+\beta)^3} +$ etc. in infinitum s inuenietur ex hac aequatione $\frac{\alpha^3 d(x d(x d(x^{\frac{\beta}{\alpha}} s)))}{x^{\frac{\beta}{\alpha}} dx^3} = 1+s$. Atque ita porro pro ſequentibus.

§. 19. Sint nunc coëfficientes potentiarum ipſius x fractiones, quarum tam numeratores quam denominatores ſint facta ex certo factorum numero pro indice, cuiusque termini creſcente conſtantia. Ita ſit progreſſio propoſita haec $\frac{(a+b)x}{(\alpha+\beta)} + \frac{(a+b)(2a+b)}{(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)} x^2 + \text{--} +$ $\frac{(a+b) \text{----} (na+b)}{(\alpha+\beta) \text{----} (n\alpha+\beta)} x^n$; huius ſumma ponatur s, erit $p \int x^{\pi} s$

$dx = \frac{p(a+b)}{(\pi+1)\alpha+\beta)} x^{\pi+2} + \cdots + \frac{p(a+b)\cdots(\alpha n+b)}{(\pi+n+1)(\alpha+\beta)\cdots(\alpha n+\beta)} x^{\pi+n+1}$. Fiat $apn + bp = \pi + n + 1$, erit $p = \frac{1}{c}$ et $\pi = \frac{b-a}{a}$. Adeoque $\frac{\int x^{\frac{b-a}{a}} s\,dx}{a} = \frac{x^{\frac{b+a}{a}}}{\alpha+\beta} + \cdots +$ $\frac{(a+b)\cdots(a(n-1)+b)}{(\alpha+\beta)\cdots(\alpha n+\beta)} x^{\frac{b}{a}+n}$. Et denuo $\frac{pd(x^{\pi}\int x^{\frac{b-a}{a}} s\,dx}{a\,dx}$ $= \frac{p(b+a+a\pi)}{c(\alpha+\beta)} x^{\frac{b}{a}+\pi} + \cdots + \frac{p(b+n+a\pi)(a+b)\cdots(a(n-1)+b)}{a(\alpha+\beta)\cdots(\alpha n+\beta)}$ $x^{\frac{b}{a}+\pi+n-1}$. Fiat $bp + apn + ap\pi = a\alpha n + a\beta$, erit $p = \alpha$, et $\pi = \frac{\beta}{c} - \frac{b}{c}$. Vnde erit $\frac{\alpha d(x^{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}}\int x^{\frac{b-a}{a}} s\,dx)}{a\,dx}$ $= x^{\frac{\beta}{\alpha}} + \cdots + \frac{(a+b)\cdots(a(n-1)+b)}{(\alpha+\beta)\cdots(\alpha(n-1)+\beta)} x^{\frac{\beta}{\alpha}+n-1} = x^{\frac{\beta}{\alpha}} +$ $x^{\frac{\beta}{\alpha}}\left(s - \frac{(a+b)\cdots(an+b)}{(\alpha+\beta)\cdots(\alpha n+\beta)} x^{n}\right)$. Ex qua aequatione s determinare licet. Si summa progressionis propositae in infinitum desideretur, erit $\frac{\alpha d(x^{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}}\int x^{\frac{b-a}{a}} s\,dx)}{a\,dx} = x^{\frac{\beta}{\alpha}} +$ $x^{\frac{\beta}{\alpha}} s$, seu $\frac{\alpha}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}\right) x^{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}-1}\int x^{\frac{b-a}{a}} s\,dx + \frac{\alpha}{a} x^{\frac{\beta}{\alpha}-1} s =$ $x^{\frac{\beta}{\alpha}} + x^{\frac{\beta}{\alpha}} s$. Quae abit in hanc $\left(\frac{\beta}{a}-\frac{\alpha b}{a\alpha}\right) x^{\frac{\alpha-b}{a}}\int x^{\frac{b-a}{a}} s\,dx$ $+ \frac{\alpha}{a} s = x + x s$, vel hanc $\left(\frac{\beta}{a}-\frac{\alpha b}{a^2}\right)\int x^{\frac{b-a}{a}} s\,dx + \frac{\alpha}{a} x^{\frac{b}{a}}$ $s = x^{\frac{b+a}{a}} + x^{\frac{b+a}{a}} s$. Haec differentiata dat $\left(\frac{\beta}{a}-\frac{\alpha b}{a^2}\right) x^{\frac{b-a}{a}}$ $s\,dx + \frac{\alpha}{a} x^{\frac{b}{a}} ds + \frac{\alpha b}{a^2} x^{\frac{b-a}{a}} s\,dx = \left(\frac{b+a}{a}\right) x^{\frac{b}{a}} dx + x^{\frac{b+a}{a}} ds$ $+ \left(b\frac{+a}{a}\right) x^{\frac{b}{a}} s\,dx$, quae reducitur ad hanc $\frac{\beta}{a} s\,dx + \frac{c}{a}$ $x\,ds$

$xds=(\frac{b+a}{a})xdx+x^2ds+(\frac{b+a}{a})xsdx$. Seu $ds+\frac{\beta sdx-(b+a)xsdx}{\alpha c-\alpha ax^2}=\frac{(b+a)xdx}{\alpha c-\alpha ax^2}$. Multiplicetur haec aequatio per $e^{\int\frac{\beta dx-(b+a)xdx}{\alpha c-\alpha ax^2}}$ vel per $x^{\frac{\beta}{\alpha}}(\alpha-ax)^{\frac{b}{a}-\frac{\beta}{\alpha}+1}$. Erit $x^{\frac{\beta}{\alpha}}(\alpha-ax)^{\frac{b}{a}-\frac{\beta}{\alpha}+1}s=(b+a)\int x^{\frac{\beta}{\alpha}}(\alpha-ax)^{\frac{b}{a}-\frac{\beta}{\alpha}}dx$. Atque $s=\frac{(b+a)\int x^{\frac{\beta}{\alpha}}(\alpha-ax)^{\frac{b}{a}-\frac{\beta}{\alpha}}dx}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}(\alpha-ax)^{\frac{b}{a}-\frac{\beta}{\alpha}+1}}$. Summa igitur algebraice poterit assignari si vel $\frac{\beta}{\alpha}$ vel $\frac{b}{a}-\frac{\beta}{\alpha}$ fuerit numerus integer affirmatiuus.

§. 20. Si progressio fuerit ex huiusmodi ipsius x coefficientibus et algebraicis compositа; primo coefficientes algebraici differentiatione et integratione debent tolli, vt ibi est factum, et tum progressio resultans modo hic exposito tractari. Vt sit progressio proposita $\frac{1.x}{1}+\frac{3x^2}{1.2}+\frac{5x^3}{1.2.3}+\text{---}+\frac{(2n-1)x^n}{1.2.3\text{---}n}$ summa huius ponatur s, erit $p\int x^\pi sdx=\frac{1.px^{\pi+2}}{(\pi+2)1}+$ $\text{---}+\frac{(2n-1\ px^{\pi+n+1}}{(\pi+n+1\ (1.2.3\text{---}n)}$. Fiat $2np-p=\pi+n+1$, erit $p=\frac{1}{2}$ et $\pi=-\frac{3}{2}$. Ex quo erit $\frac{\int x^{-\frac{3}{2}}sdx}{2}=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1.2}+\text{---}+\frac{x^{n-\frac{1}{2}}}{1.2.3\text{---}n}$. Multiplicetur per $x^{\frac{1}{2}}$, erit $\frac{x^{\frac{1}{2}}\int x^{-\frac{3}{2}}sdx}{2}=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+$ $\frac{x^3}{1.2.3}$

$\frac{x^3}{1.2.3}+\text{---}\frac{x^n}{1.2.3\text{---}n}$. Ergo $\frac{d(x^{\frac{1}{2}}\int x^{-\frac{3}{2}}s\,dx)}{2\,dx}=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\text{----}+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\text{---}(n-1)}=1+\frac{x^{\frac{1}{2}}\int x^{-\frac{3}{2}}s\,dx}{2}-\frac{x^n}{1.2.3\text{---}n}$, ex qua aequatione s inuenietur. Erit autem $\frac{\int x^{-\frac{3}{2}}s\,dx}{4x^{\frac{1}{2}}}+\frac{s}{2x}=1+\frac{x^{\frac{1}{2}}\int x^{-\frac{3}{2}}s\,dx}{2}-\frac{x^n}{1.2.3\text{---}n}$

Ponatur $1.2.3.\text{----}n=A$, erit porro $(1-2x)\int x^{-\frac{3}{2}}s\,dx=4x^{-\frac{1}{2}}-\frac{2s}{x^{\frac{1}{2}}}-\frac{4x^{n+\frac{1}{2}}}{A}$. Summa progreſſionis propoſitae in infinitum continuatae vero definietur ex iſta aequatione $\int x^{-\frac{3}{2}}s\,dx=\frac{4x-2s}{(1-2x)\sqrt{x}}$; quae differentiata dat $\frac{s\,dx}{x\sqrt{x}}=\frac{2x\,dx+4xx\,dx+s\,dx-6sx\,dx-2x\,ds+4x^2\,ds}{(1-2x)^2x\sqrt{x}}$, ſeu $x\,dx+2x^2\,dx-sx\,dx-2sx^2\,dx-x\,ds+2x^2\,ds=0$. Quae reducitur ad hanc $ds+\frac{s\,dx(1+2x)}{1-2x}=\frac{dx(1+2x)}{1-2x}$. Quae multiplicata per $\frac{e^{-x}}{1-2x}$ fit integrabilis, prodit autem $\frac{e^{-x}s}{1-2x}=\frac{\int e^{-x}dx(1+2x)}{(1-2x)^2}=\frac{e^{-x}}{1-2x}-1$. Atque hinc $s=1-e^x(1-2x)$. Quare ſi fuerit $x=\frac{1}{2}$ erit $s=1$. Adeoque $1=\frac{1}{1.2}+\frac{3}{1.2.4}+\frac{5}{1.2.3.8}+\frac{7}{1.2.3.4.16}+$ etc. in infin.

§. 21. Ex his apparet ad quas progreſſiones ſummandas methodus hac diſſertatione expoſita ſe extendat: ſcilicet ad omnes eas progreſſiones, quae comprehenduntur

duntur hoc termino generali $\frac{AP}{EQ}x^{\alpha n+\beta}$, vbi A et B designant terminos ordinis n, quarumcunque progressionum algebraicarum. Et P est factum ex $\gamma n+\delta$ terminis progressionis cuiusque algebraicae, itemque Q est simile factum ex $\varepsilon n+\zeta$ terminis etiam cuiuscunque progressionis algebraicae. Omnino autem summae huiusmodi progressionum tribus modis expositae inuenientur. Vel enim prodit summa prorsus algebraica, vel assignatur quadratura quaepiam, a qua summa pendet. Vel tertio aequatio reperitur, cuius variabiles quantitates s et x penitus non possunt a se inuicem separari, vt saltem constet, vtrum progressio summam habeat algebraicam, an a cuius curuae quadratura pendeat. Quamuis vero haec methodus tam late pateat, tamen innumerae occurrere possunt progressiones per eum non summabiles, quarum quidem vel nullo alio modo summae assignari possunt, vt huius $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n-1}+\cdots$, vel quarum summae etiam constant, vt huius $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{26}+$ etc. termino generali existente $\frac{1}{a^\alpha-1}$, in quo a et α numeros quoscunque integros praeter vnitatem denotant; cuius summam esse $=1$ demonstrauit Celeberrimus *Goldbachius*. Quia autem eius terminus generalis proprie sic dictus non potest exhiberi, mirum non est, eam hac methodo non posse summari.

CRITERIA QVAEDAM AEQVATIONVM QVARVM NVLLA RADIX RATIONALIS EST.

AVCTORE
C. G.

VTrum aequatio data quartam poteſtatem excedens radicem rationalem admittat methodis adhuc cognitis non aliter indagari poterit quam vltimi termini, quem abſolutum vocant, diuiſores omnes inueſtigando et diuiſionem aequationis per quantitatem incognitam cum huiusmodi diuiſore ſigno + vel − coniunctam tentando; etſi vero de ſeligendis diuiſoribus vltimi termini ad hanc rem idoneis praecepta quaedam dari non ignorem, negari non poteſt, ſi coefficientes et ipſe numerus abſolutus permagni fuerint hoc tentamen operoſiſſimum fieri, quodſi praeterea coefficientes vel ipſe terminus abſolutus ex quantitatibus indeterminatis compoſiti fuerint, praeceptorum huiusmodi de ſeligendis diuiſoribus vſus vix vllus erit; animaduerti autem innumeris caſibus fieri poſſe, vt quamuis magni et quantitatibus indeterminatis permixti ſint coefficientes et terminus abſolutus, tamen aequationem datam radicis rationalis omnino expertem eſſe ex natura coefficientium et termini abſoluti vno quaſi momento appareat, de quibus caſibus nunc dicere conſtitui:

Litteris $a. b. c. x. \alpha. \beta.$ etc. item nomine numeri, diuiſoris et reſidui in ſequentibus denotabuntur numeri inte-

integri; X vero ſignificabit ſeriem quamcunque finitam huius formae $\alpha + \beta\pi + \gamma x^2 +$ etc. igitur ſi oſtendi poſſit in aequatione data, v. gr. $x^n = X$, terminum abſolutum α. huius eſſe naturae, vt additus ad $\beta x + \gamma x^2 +$ etc. non poſſit producere numerum poteſtatis n. eo ipſo demonſtratum erit aequationem $x^n = X$ nullam admittere radicem rationalem, id vero innumeris modis accidere certum eſt.

Ante annos complures in litteris ad amicum quendam affirmaueram numerum integrum datum, quantumuis magnum mutata vnica nota eo perduci poſſe, vt notae illius omnes quacunque ratione transpoſitae nunquam admittant radicem rationalem vllius poteſtatis; id ſcilicet effici oſtendebam, ſi datus numerus in alium eiusmodi transmutetur, vt diuiſus per 9, relinquat 3, vel 6, cum vero in numeris vel centum notarum facile vnius alteriusue minuti temporis ſpatio dignoſci poſſit quinam numerus ſit ſublatis omnibus nouenariis reſiduus, patet breuiſſimo tempore proprietatem aliquam huius numeri demonſtrari, ad quam aliunde oſtendendam, ſi quis ingentem numerum omnium transpoſitionum poſſibilium, et in quoque caſu operoſum tentamen extrahendarum tot radicum perpendat, multos annos haud ſufficere fatebitur, ſed omnes numeri praeter binarium ita comparati ſunt, vt, ſi alii numeri certarum poteſtatum per eosdem diuidantur, nonniſi certi aliqui reſidui maneant, ſin vero alius reſiduus ſit, tuto affirmari poſſit numerum ſic diuiſum radicem rationalem illius poteſtatis non habere, id quod exemplis declarabimus:

Omnes numeri poteſtatis ſecundae diuiſi per 3, relinquunt vnum ex his: 0. 1. erunt enim omnes huius formae $(3m-1)^2, (3m-2)^2$ vel $(3m)^2$, primo et ſecundo diuiſo per 3. remanet 1. tertio diuiſo per 3. remanet 0. vnde ſequitur

(I.) nullum numerum huius formae $3p+2$. eſſe quadratum, vel poſito ſigno $=$ pro aequatione impoſſibili, ſemper fore $x^2 = 3p+2$.

Iisdem veſtigiis inſiſtendo demonſtratur numeros poteſtatis tertiae, quintae, ſeptimae etc. vel generatim x^{2q+1} diuiſos per 4. relinquere vnum ex his 0. 1. 3. adeoque nullum numerum qui diuiſus per 4. relinquat 2. habere radicem rationalem poteſtatis $2q+1$. neque vllum numerum qui diuiſus per 4. relinquit 2. vel 3. radicem ſecundae poteſtatis, hoc eſt

II. $\begin{cases} x^{2q+1} = 4p+2 \\ x^2 \quad = 4p+\alpha. \text{ ſi } \alpha \text{ fuerit} = 2, \text{ vel } 3. \end{cases}$

(III.) $\begin{cases} x^2 = 5p+\alpha. \text{ ſi } \alpha \text{ fuerit } 2, \text{ vel } 3. \\ x^4 = 5p+\alpha. \text{ ſi } \alpha \text{ fuerit } 2, 3, \text{ vel } 4. \end{cases}$

(IV.) $x^2 = 6p+\alpha$. ſi $\alpha = 2$, vel 5.

(V.) $x^q = 7p+\alpha$

ſi $q = 2$. et $\alpha = 3, 5$, vel 6.
ſi $q = 3$. et $\alpha = 2, 3, 4$, vel 5.
ſi $q = 6$. et $\alpha = 2, 3, 4, 5$, vel 6.

(VI.) $\begin{cases} x^2 = 8p+\alpha, \text{ ſi } \alpha = 2, 3, 5, 6 \text{ vel } 7. \\ x^{2q+1} = 8p+\alpha. \text{ ſi } \alpha = 2, 4, \text{ vel } 6. \\ x^{2q+2} = 8p+\alpha. \text{ ſi } \alpha = 2, 3, 4, 5, 6, \text{ vel } 7. \end{cases}$

(VII.)

(VII.) $x^q = 9p + \alpha$.

si $q = 3m \pm 1$. et $\alpha = 2, 3, 5, 6, 8$.
si $q = 6$. et $\alpha = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.
si $q = 6m - 3$. et $\alpha = 2, 3, 4, 5, 6, 7$.
si $q = 6m \pm 1$. et $\alpha = 3, 6$.

Atque eodem modo reliquorum numerorum reſidui, qui indicant numerum aliquem diuiſum non habere radicem rationalem certae alicuius poteſtatis, erui poterunt; quod ſi iam diuiſor huiusmodi vocetur d; numerus ex diuiſione reſiduus r; numerus datae poteſtatis e; numerus ipſe datus x^e, ſitque p. numerus quicunque, ſemper erit $x^e = dp + r$, hunc numerum reſiduum r, breuitatis cauſa vocabimus *congruum*, quia nempe aptus eſt ad demonſtrandum numerum aliquem non habere radicem rationalem certae alicuius poteſtatis, et cum p. ſit numerus quicunque, ſubſtitui pro eo poterit X. et fiet $x^e = dX + r$. ſit v. gr. aequatio data

$$x^{2n} = 3ax^m + 3bx + 3c + 2.$$

fiet $e = 2n$; $d = 3$; $X = ax^m + bx + c$; $r = 2$.
ſed antea oſtenſum eſt nullum numerum quadratum ſi diuidatur per 3. relinquere 2. quod tamen fieret in hac aequatione, ſi poſſibilis eſſet, ergo x^n in hac aequatione non eſt numerus rationalis adeoque nec x rationalis (nam $n. x.$ et reliquae litterae hic nonniſi numeros integros ſignificant).

Haec methodus ad omnes caſus pertinet, quibus aequatio data diſpeſci poteſt in duas partes quarum vna ſit X, ad quamcunque poteſtatem elevata, altera vero per aliquem diuiſorem d. diuisa relinquat numerum *congruum*;

ſit aequatio data

$$x^{10} = 7x^6 + x^5 + 7cx - 6$$

hanc nullam habere radicem rationalem, ex eo oſtenditur, quod addendo vtrobique $6x^5 + 9$. mutatur in hanc

$$x^{10} + 6x^5 + 9 = 7x^6 + 7x^5 + 7cx + 3.$$

cuius prior pars continet numerum quadratum, poſterior diuiſa per 7 relinquit numerum *congruum* 3. et generatim $x^e = p^m X + p$.

ſi fuerint e. et m. numeri vnitate maiores, et p. numerus *primus*; quod ſic demonſtratur: cum $p^m X + p$. ſit diuiſibilis per p; erit etiam x^e (ſi vera eſt aequatio) diuiſibilis per p. et cum p. ſit numerus *primus*, erit x. vel $= p$. vel diuiſibilis per p. ponatur ergo x. $= ap$. vbi a. ſit numerus quicunque, fiet $a^e p^e = p^m X + p$. vel $a^e p^{e-1} = p^{m-1} X + 1$. quam aequationem vtique impoſſibilem eſſe ex eo patet, quod altera pars aequationis per p. diuidi poteſt, altera nequit, vnde conſtat nullum numerum qui diuiſus per p^m relinquit p. habere radicem rationalem vllius poteſtatis, ſi p. ſit numerus *primus*.

OB-

OBSERVATIONES DE THEOREMATE QVODAM FERMATIANO, ALIISQVE AD NVMEROS PRIMOS SPECTANTIBVS.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

NOtum eſt hanc quantitatem $a^n + 1$ ſemper habere diuiſores, quoties n ſit numerus impar, vel per imparem praeter vnitatem diuiſibilis. Namque $a^{2m+1} + 1$ diuidi poteſt per $a + 1$ et $a^{p(2m+1)} + 1$ per $a^p + 1$, quicunque etiam numerus loco a ſubſtituatur. Contra vero ſi n fuerit eiusmodi numerus, qui per nullum numerum imparem niſi vnitatem diuidi poſſit, id quod euenit, quando n eſt dignitas binarii, nullus numeri $a^n + 1$ poteſt aſſignari diuiſor. Quamobrem ſi qui ſunt numeri primi huius formae $a^n + 1$, ii omnes comprehendantur neceſſe eſt in hac forma $a^{2^m} + 1$. Neque tamen ex hoc poteſt concludi $a^{2^m} + 1$ ſemper exhibere numerum primum quicquid ſit a; primo enim perſpicuum eſt, ſi a ſit numerus impar, iſtam formam diuiſorem habiturum 2. Deinde quoque, etiamſi a denotet numerum parem, innumeri tamen dantur caſus, quibus numerus compoſitus prodit. Ita haec ſaltem formula $a^2 + 1$ poteſt diuidi per 5, quoties eſt $a = 5b \pm 3$, et $30^2 + 1$ poteſt diuidi per 17, et $50^2 + 1$ per 41. Simili modo $10^4 + 1$ habet diuiſorem 73; $6^8 + 1$ habet diuiſorem 17, et $6^{128} + 1$ eſt diuiſibilis per 257. At huius formae $2^{2^m} + 1$ quan-

quantum ex tabulis numerorum primorum, quae quidem non vltra 100000 extenduntur, nullus detegitur casus, quo diuisor aliquis locum habeat. Hac forte aliisque rationibus *Fermatius* adductus enunciare non dubitauit $2^{2^m}+1$ semper esse numerum primum, hocque vt eximium theorema *Wallisio* aliisque Mathematicis Anglis demonstrandum proposuit. Ipse quidem fatetur se eius demonstrationem non habere, nihilo tamen minus asserit esse verissimum. Vtilitatem eius autem hanc potissimum praedicat, quod eius ope facile sit numerum primum quouis dato maiorem exhibere, id quod sine huiusmodi vniuersali theoremate foret difficillimum. Leguntur haec in *Wallisii* Commercio Epistolico Tomo Eius Operum secundo inserto, epistola penultima. Extant etiam in ipsius *Fermatii* operibus p. 115. sequentia. "Cum autem numeros a binario quadratice "in se ductos et vnitate auctos esse semper numeros "primos apud me constet, et iam dudum Analystis il-"lius theorematis veritas fuerit significata nempe esse "primos 3, 5, 17, 257, 65537, etc. in infinit. nullo "negotio etc.

Veritas istius theorematis elucet, vt iam dixi, si pro m ponatur 1, 2, 3 et 4, prodeunt enim hi numeri 5, 17, 257, et 65537, qui omnes inter numeros primos in tabula reperiuntur. Sed nescio, quo fato eueniat, vt statim sequens nempe $2^{2^5}+1$ cesset esse numerus primus, obseruaui enim his diebus longe alia agens posse hunc numerum diuidi per 641. vt cuique tentanti statim patebit.

Est

Eſt enim $2^{2^5}+1 = 2^{32}+1 = 4294967297$. Ex quo intelligi poteſt, theorema hoc etiam in aliis, qui ſequuntur, caſibus fallere, et hanc ob rem problema de inueniendo numero primo quouis dato maiore etiam nunc non eſſe ſolutum.

Conſiderabo nunc etiam formulam 2^n-1, quae quoties n non eſt numerus primus, habet diuiſores: neque tantum 2^n-1 ſed etiam a^n-1. Sed ſi n ſit numerus primus, videri poſſet etiam 2^n-1 ſemper talem exhibere: hoc tamen affeuerare nemo eſt auſus quantum ſcio, cum tam facile potuiſſet refelli. Namque $2^{11}-1$ i.e. 2047 diuiſores habet 23 et 89 et $2^{23}-1$ diuidi poteſt per 47. Video autem Cel. *Wolfium* non ſolum hoc in Elem. Matheſeos editione altera non aduertiſſe, vbi numeros perfectos inueſtigat, atque 2047 inter primos numerat; ſed etiam 511 ſeu 2^9-1 pro tali habet, cum tamen ſit diuiſibilis per 2^3-1 i. e. 7. Dat autem $2^{n-1}(2^n-1)$ numerum perfectum, quoties 2^n-1 eſt primus, debet ergo etiam n eſſe numerus primus. Operae igitur pretium fore exiſtimaui eos notare caſus, quibus 2^n-1 non eſt numerus primus, quamuis n ſit talis. Inueni autem hoc ſemper fieri, ſi ſit $n = 4m-1$, atque $8m-1$ fuerit numerus primus, tum enim 2^n-1 ſemper poterit diuidi per $8m-1$. Hinc excludendi ſunt caſus ſequentes, 11, 23, 83, 131, 179, 191, 239, etc. qui numeri pro n ſubſtituti reddunt 2^n-1 numerum compoſitum. Neque tamen reliqui numeri primi omnes loco n poſiti ſatisfaciunt, ſed plures inſuper excipiuntur, ſic obſeruaui $2^{37}-1$ diuidi poſſe per 223, $2^{43}-1$ per

431, $2^{29}-1$ per 1103, $2^{73}-1$ per 439, omnes tamen excludere non eſt in poteſtate. Attamen aſſerere audeo praeter hos caſus notatos, omnes numeros primos minores quam 50, et forte quam 100, efficere $2^{n-1}(2^n-1)$ eſſe numerum perfectum, ſequentibus numeris pro n poſitis, 1, 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 41, 47, vnde 11. prouenient numeri perfecti. Deauxi has obſeruationes ex Theoremate quodam non ineleganti, cuius quidem demonſtrationem quoque non habeo, verum tamen de eius veritate ſum certiſſimus. Theorema hoc eſt, a^n-b^n, ſemper poteſt diuidi per $n+1$, ſi $n+1$ fuerit numerus primus atque a et b non poſſint per eum diuidi; eo autem difficiliorem puto eius demonſtrationem eſſe, quia non eſt verum niſi $n+1$ ſit numerus primus. Ex hoc ſtatim ſequitur 2^n-1 ſemper diuidi poſſe per $n+1$, ſi fuerit $n+1$ numerus primus, ſeu cum omnis primus ſit impar praeter 2, hicque ob conditiones theorematis, quia eſt $a \equiv 2$, non poſſit adhiberi, poterit $2^{2m}-1$ ſemper diuidi per $2m+1$ ſi $2m+1$ ſit numerus primus. Quare etiam vel 2^m+1 vel 2^m-1 diuidi poterit per $2m+1$. Deprehendi autem 2^m+1 poſſe diuidi, ſi fuerit $m \equiv 4p+1$ vel $4p+2$, at 2^m-1 habebit diuiſorem $2m+1$, ſi $m \equiv 4p$ vel $4p-1$. Haec perſecutus in multa alia incidi theoremata non minus elegantia, quae eo magis aeſtimanda eſſe puto, quod vel demonſtrari prorſus nequeant, vel ex eiusmodi propoſitionibus ſequantur, quae demonſtrari non poſſunt, primaria igitur hic adiungere viſum eſt.

Theo-

Theorema I. Si fuerit n numerus primus, omnis potentia exponentis $n-1$ per n diuisa vel nihil vel 1 relinquit.

Theorema II. Manente n numero primo, omnis potentia, cuius exponens est $n^{m-1}(n-1)$, diuisa per n^m vel o vel 1 relinquit.

Theorema III. Sint m, n, p, q, etc. numeri primi inaequales, sitque A minimus communis diuiduus eorum vnitate minutorum, puta ipsorum $m-1$, $n-1$, $p-1$; $q-1$, etc. his positis dico omnem potentiam exponentis A vt a^A diuisam per $mnpq$ etc. vel o vel 1 relinquere, nisi a diuidi possit per aliquem horum numerorum, m, n, p, q etc.

Theorema IV. Denotante $2n+1$ numerum primum poterit 3^n+1 diuidi per $2n+1$, si sit vel $n = 6p+2$ vel $n = 6p+3$: at 3^n-1 diuidi poterit per $2n+1$ si sit vel $n =$ vel $6p$ vel $n = 6p-1$.

Theorema V. 3^n+2^n potest diuidi per $2n+1$ si sit $n =$ vel $12p+3$, vel $12p+5$, vel $12p+6$, vel $12p+8$. Atque 3^n-2^n potest diuidi per $2n+1$, si sit $n =$ vel $12p$ vel $12p+2$, vel $12p+9$, vel $12p+11$.

Theorema VI. Sub iisdem conditionibus quibus 3^n+2^n poterit etiam 6^n+1 diuidi per $2n+1$; atque 6^n-1 sub iisdem, quibus 3^n-2^n.

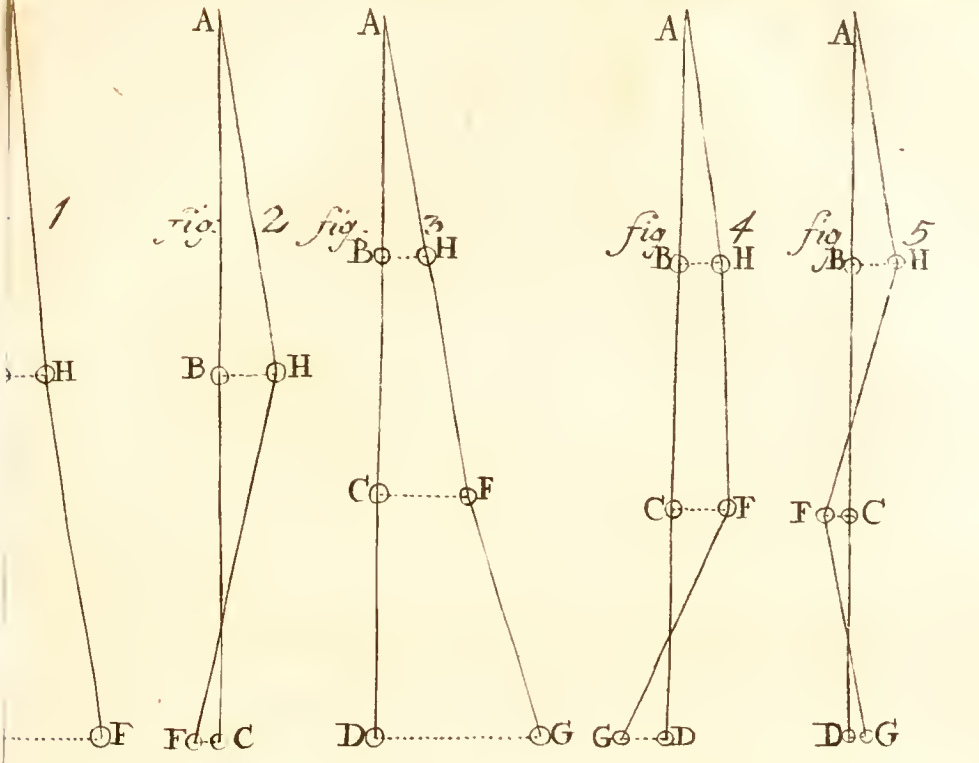
Danielis Bernoulli

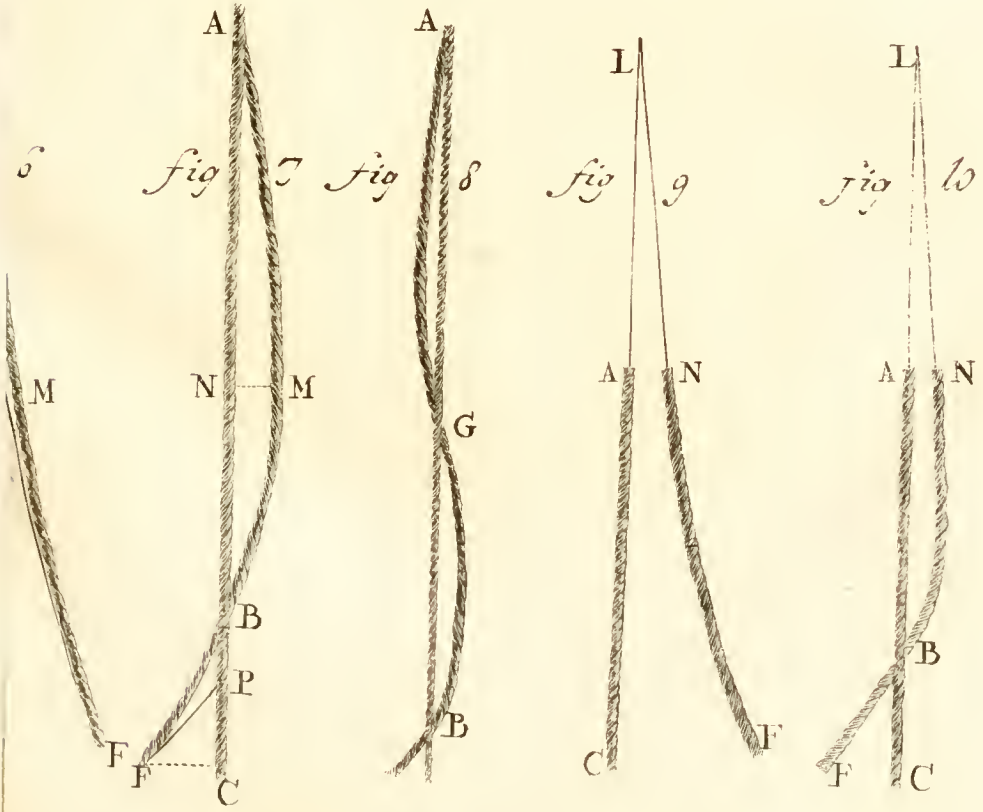
THEOREMATA DE OSCILLATIONIBVS CORPORVM FILO FLEXILI CONNEXORVM ET CATENAE VERTICALITER SVSPENSAE.

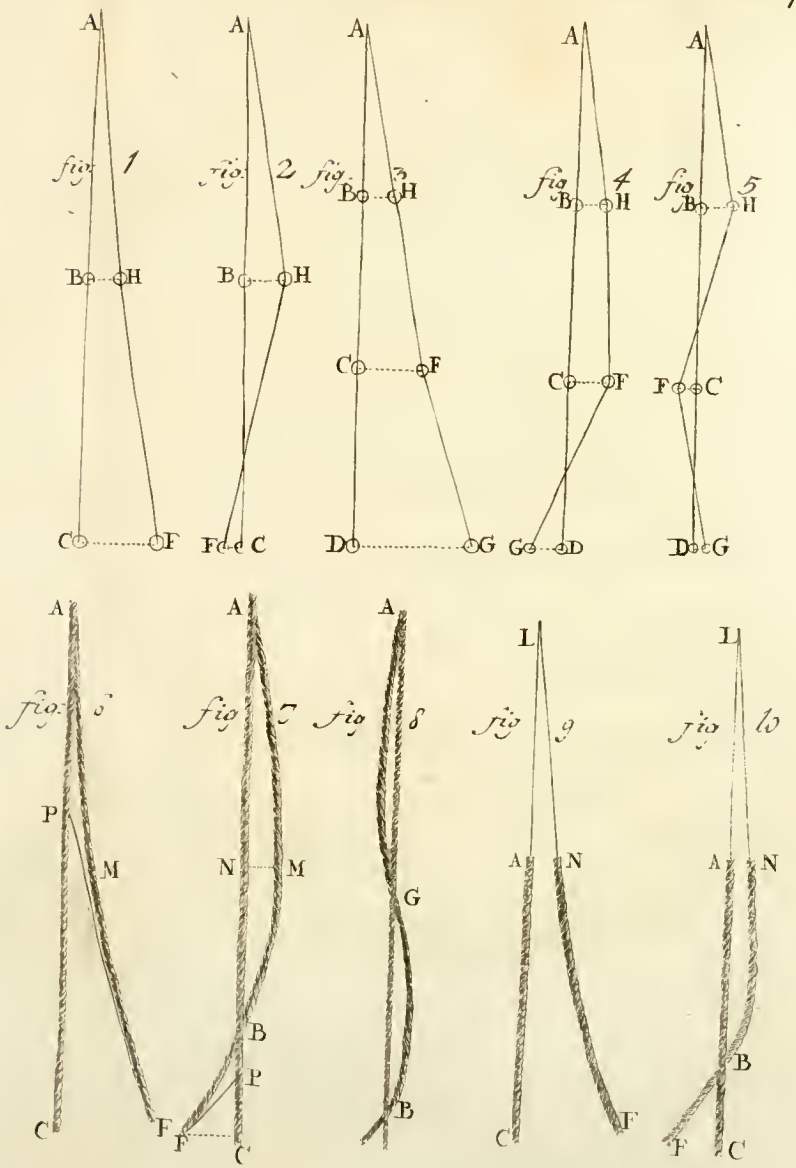
Introductio ad Argumentum.

Tabula VII.

THeoriae oſcillationum, quas adhuc Auctores pro corporibus dederunt ſolidis, inuariatum partium ſitum in illis ponunt, ita ut ſingula communi motu angulari ferantur. Corpora autem, quae ex filo flexili ſuſpenduntur, aliam poſtulant theoriam, nec ſufficere ad id negotium videntur principia communiter in mechanica adhiberi ſolita, incerto nempe ſitu, quem corpora inter ſe habeant, eodemque continue variabili. De his cogitandi anſam mihi aliquando dedit catena verticaliter ſuſpenſa et motibus oscillatoriis agitata, hancque tunc videns motibus valde irregularibus iactari, primo mentem ſubiit, ad quamnam curuam catena eſſet inflectenda, vt omnibus eius partibus ſimul moueri incipientibus hae quoque vna in ſitum peruenirent linae verticalis per punctum ſuſpenſionis transeuntis: hoc modo oſcillationes aequabiles fore intellexi atque tales quarum tempora definiri poſſent. Mox vero ſenſi difficile eſſe hanc determinare curuam, niſi disquiſitionis initium fiat a caſibus ſimpliciſſimis. O ſus itaque ſum has meditationes a corporibus duobus filo flexili in data diſtantia cohaerentibus; poſtea tria conſi-


1
A
H
F
fig. 2
A
B
H
F
C
fig. 3
A
B
H
C
F
D
G
fig. 4
A
B
H
C
F
G
D
fig. 5
A
B
H
F
C
D
G


6
M
fig. 7
A
N
M
B
P
F
F
C
fig. 8
A
G
B
fig. 9
L
A
N
C
F
fig. 10
L
A
N
B
F
C


A
fig 1
B
H
C
F
A
fig 2
B
H
F
e
C
A
fig 3
B
H
C
F
D
G
A
fig 4
B
H
C
F
G
D
A
fig 5
B
H
F
C
D
G
A
fig 6
P
M
C
F
A
fig 7
N
M
B
P
F
C
A
fig 8
G
B
L
fig 9
A
N
C
F
L
fig 10
A
N
B
F
C

conſideraui moxque quatuor, et tandem numerum eorum diſtantiasque qualescunque; cumque numerum corporum infinitum facerem, vidi demum naturam oscillantis catenae ſiue aequalis ſiue inaequalis craſſitiei ſed vbique perfecte flexilis. Suo ſingula percurram ordine; demonſtrationes autem quas nunc adornare non vacat in aliam occaſionum reſeruabo. In ſolutione nouis vſus ſum principiis, propterea que volui theoremata experimentis confirmare, ne de eorum veritate dubium eſſe poſſet, iis praeſertim, qui hisce rebus ſua natura aliquanto difficilioribus non omnem dare poterunt animi attentionem, quique ſic facile in falſam incidere poſſent ſolutionem. Caeterum alias oſcillationes non conſiderabimus, quam quae minimae ſint et iſochronae: pro experimentis tamen ſine notabili errore paulo maiores illas efficere licebit.

Theorema 1.

2. *Fuerit filum perfecte flexile non graue* AHF *ſuſpenſum ex puncto* A *habeatque in* H *et* F *duo alligata pondera aequalia: tantum autem diſtet corpus inferius a ſuperiori quantum hoc a puncto ſuſpenſionis, Sit porro linea* ABC *verticalis, et ab hac corpora* H *et* F *veluti infinite parum diſtent; Denique ducantur horizontales minimae* HB *et* FC: *Dico ſi ambo corpora ſimul oſcillari incipiant, fore vt eodem temporis puncto perueniant in ſitum lineae verticalis atque hoc modo oſcillationes ſuas vniformiter perficiant, cum ſumitur* CF : BH = 1 + $\sqrt{2}$: 1. Fig. 1. 2.

Corollarium.

3. Igitur duobus modis oſcillationes fiunt vnifor-

mes; nempe cum ſumitur, vt figura prima oſtendit, $CF = (1 + \sqrt{2})\,BH$; tum etiam cum ad normam figurae ſecundae ſit $CF = (1 - \sqrt{2})\,BH$.

Theorema 2.

4. *Factis oſcillationibus corporum* H *et* F *vniformibus, erit longitudo penduli ſimplicis tautochroni* $= \frac{1}{2 \pm \sqrt{2}}$ AH *vel* $\frac{1}{4 \pm \sqrt{8}}$. AC, *vbi ſignum affirmatiuum valet pro oſcillationibus contrariis figurae ſecundae, ſignum negatiuum pro conſpirantibus figurae primae.*

Corollarium.

5. Multo itaque celerius oſcillationes contrariae abſoluuntur, quam conſpirantes: illarum enim 231 numerabis, dum hae centies fuerint replicatae. Conſpirantes autem parum differunt ab iis quae fierent ſub iisdem circumſtantiis poſito filo AHF rigido: paullo tamen celerius oſcillantur corpora in filo rigido quam flexili, erunt nempe numeri oſcillationum aequali tempore peractarum praeterpropter vt 1012 ad 1000.

Scholium.

6. Vt ad experientiam reuocarem hasce propoſitiones, vſus ſum globis plumbeis perfecte aequalibus, qui dum funderentur in medio tenui foramine perforati manebant; traiecto filo fericeo globisque ope nodorum firmatis ita vt inferior duplo magis diſtaret a puncto ſuſpenſionis quam ſuperior. Digitis deduxi globum inferiorem in ſitum F tenſo filo: mox oſcillationes fiebant vniformes, et ope diuiſionum in pariete factarum diſtincte cognoui excurſiones corporum H et F in

F in figura 1. fuiſſe vt 100 ad 241, id eſt, vt 1 ad $1+\sqrt{2}$ (§. 2.): Numerus etiam oſcillationum dato tempori conueniens accurate reſpondit longitudini penduli ſimplicis iſochroni $\frac{1}{2-\sqrt{2}}$AH in *prop.* 4. definitae. Deinde facta $FC=(1-\sqrt{2})BH$ in figura ſecunda, detinui manibus globos in ſitu F et H illosque mox eodem temporis puncto dimiſi: oſcillationes ortae ſunt ſic ſatis vniformes ſecus atque fiebat cum alia proportione diſtantiae FC et HB ſumerentur: numerus oſcillationum accurate rurſus fuit, qui conueniret longitudini penduli ſimplicis $\frac{1}{2+\sqrt{2}}$AH iſochroni *prop.* 4.

Theorema 3.

GENERALE PRO DVOBVS CORPORIBVS.

7. *Fuerit iam pars fili* $AH=l$; $HF=L$; *pondus corporis* $H=m$, *alteriusque* $F=M$: *dico fore oſcillationes vniformes ſi ſit*

$$CF=\frac{mL-ml+ML+Ml\pm\sqrt{4mMLL+(ml+ML+Ml-mL)^2}}{2Ml}\times BH,$$

longitudinem autem penduli ſimplicis iſochroni fore

$$=\frac{2mLl}{mL+ml+Ml+ML\mp\sqrt{(4mMLL+(ml+ML+Ml-mL)^2)}},$$

aut, poſito $L+l=\lambda$ *et* $M+m=\mu$,

$$=\frac{2m\lambda l-2mll}{\mu\lambda+\sqrt{(\mu\mu\lambda\lambda-4m\mu l\lambda+4m\mu ll)}}.$$

Theorema 4.

8. *Si loco duorum corporum aequalium ponantur tria tantum a ſe inuicem diſtantia, quantum ſupremum a puncto ſuſpenſionis* A *diſtat, poterunt tribus diuerſis modis oſcillationes fieri vniformes: primus eſt quem figura* Fig. 3. 4. 5.

tertia

tertia indicat, cum posita BH = 1, *sumitur* CF = 2, 292 *et* DG = 3, 922: *secundus, qui figura quarta repraesentatur, obtinetur faciendo* CF = 1, 353 *et* DG = −1, 044 *ac tertius cum sit, vt in figura quinta,* CF = −0, 645 *et* DG = 0, 122.

Est nempe CF aequalis accipienda tribus radicibus huius aequationis

$$4x^3 - 12xx + 3x + 8 = 0,$$

tumque pro quauis radice sumenda est

$$DG = 2xx - 2x - 2.$$

Theorema 5.

9. *Factis, vt modo dictum, oscillationibus vniformibus, erit longitudo penduli simplicis isochroni in casu figurae tertiae proxime aequalis* 2, 406 AH; *in casu figurae quartae* = 0, 436 AH *et in casu figurae quintae* = 0, 159 AH: *Est scilicet longitudo penduli isochroni* = $\frac{1}{5-2x} \times$ AH, *posito rursus* $4x^3 - 12xx + 3x + 8 = 0$.

Scholium.

10. Ambo haec theoremata experimento accurate confirmaui in casu figurae tertiae, deducto tantum corpore intimo extra situm lineae verticalis mox dimittendo: quamuis enim in primis oscillationibus inaequalitas quaedam sentiri potuerit, tamen haec sua sponte et citissime abiit, ita vt excursiones singulorum corporum pluribus vicibus successiuis, quantum oculis discerni poterat, eaedem manerent: sumtis autem earundem mensuris, talis inter eas reperta fuit proportio qua-

qualem theorema 4. indicat: numerus quoque oſcillationum perfecte reſpondit theoremati quinto: duo reliqui caſus maiorem induſtriam requirunt: potui tamen vtriusque generis oſcillationes ſatis exacte efficere, vt veritas theorematis quinti appareret.

Theorema 6.

GENERALE PRO TRIBVS CORPORIBVS.

11. *Fuerint nunc rurſus pondera corporum* H, F, G *qualiacunque ſimulque diſtantiae eorundem a puncto ſuſpenſionis rationem habuerint qualemcunque: ſit nempe pondus corporis* $H = m$, *corporis* $F = M$, *corporisque* $G = \mu$; *tumque* $AH = l$, $HF = L$ *et* $FG = \lambda$; *dico oſcillationes vniformes futuras eſſe ſi poſita* $BH = 1$, $GF = x$ *fiat* $((MMl\lambda + M\mu l\lambda)xx + (mMl\lambda + m\mu lL - mML\lambda - MMl\lambda - MML\lambda + m\mu l\lambda - M\mu l\lambda - M\mu L\lambda)x - m\mu l\lambda - mMl\lambda) \times ((M l\lambda + \mu l\lambda)x - mL\lambda - Ml\lambda - ML\lambda - \mu l\lambda - \mu L\lambda + ml L) = mm\mu llLLx$.

ſimulque ſumatur pro quauis radice

$$DG = \left(\frac{MM\lambda}{m\mu L} + \frac{M\lambda}{mL}\right)xx + \left(1 + \frac{\lambda}{L} + \frac{M\lambda}{\mu L} - \frac{M\lambda}{\mu l} - \frac{MM\lambda}{m\mu L} - \frac{MM\lambda}{m\mu l} - \frac{M\lambda}{mL} - \frac{M\lambda}{ml}\right)x - \frac{M\lambda}{\mu L} - \frac{\lambda}{L}.$$

Corollaria.

12. I. Ponatur maſſa corporis infimi $\mu = o$, diuidaturque aequatio fundamentalis ſuperioris paragraphi per factorem alterum ceu radicem inutilem; factor igitur prior erit $= o$, hincque habebitur $Mlxx + (ml - mL - Ml - ML)x - ml = o$, vel

$$x = \frac{mL - ml + ML + Ml \pm \sqrt{(4mMll + (ml - mL - Ml - ML)^2)}}{2Ml},$$

Notandum autem est, non differre hunc valorem ab illo quem dedimus in theoremate tertio, quamuis quantitates ab vtraque parte signo radicali inuolutae diuersam habeant formam.

II. Si vero massa corporis medii indicata per M ponatur $=o$, tunc, vt appareat consensus inter theorema tertium et sextum, erit in hoc posteriori intelligendum per $L+\lambda$ et μ, quod designatum fuit in altero per L. et M, ipsaque linea DG in praecedente paragrapho definita comparanda erit cum linea CF ad theorema tertium pertinente. Ad haec qui animum aduerterit, vtriusque theorematis aequationes easdem esse reperiet instituto calculo.

III. Denique cum ponitur corpus summum H indicatum per $m=o$, potest in aequatione fundamentali §. 11. vterque factor poni $=o$, et vtroque modo obtinetur CF seu $x=1+\frac{L}{\lambda}$, prouti natura rei postulat, quia tunc lineae AH et HF, vt patet, debent in directum iacere. Excursio autem corporis infimi ex aequatione dignosci non potest, nisi id particulari methodo fiat. Ita nec oscillationes definiri immediate possunt per theorema sextum, cum duo corpora vniuntur euanescente alterutra longitudinum L vel λ.

IV. Fieri potest in figura quarta, vt sit $CF=o$, quo in casu, quia durante tota oscillatione distantiae corporum a linea verticali eandem perpetuo inter se rationem seruant, corpus medium F quiescit, dum ambo reliqua hinc inde agitantur; atque tunc perspicuum est, longitudinem penduli isochroni fore $=\lambda$, quia corpus infimum veluti ex puncto fixo C suspensum oscillatur;

latur; Iſte vero caſus, de quo loquimur, obtinetur ponendo $x=o$, ſeu $x=\frac{mlL}{mL+Ml+ML+\mu l+\mu L}$.

Theorema 7.

QVOD GENERALITER PENDVLVM TAVTOCHRONVM PRO TRIBVS CORPORIBVS OSCILLANTIBVS DEFINIT.

13. *Retentis denominationibus et aequationibus theorematis ſexti dico oſcillationes ſingulorum corporum iſochronas fore cum oſcillationibus penduli ſimplicis, cuius longitudo ſit* $\frac{mlL}{mL+(M+\mu)\times(l+L-lx)}$.

Corollarium.

14. In caſu $x=o$, quem modo allegauimus, ſit longitudo penduli iſochroni $=\frac{mlL}{mL+Ml+ML+\mu l+\mu L}=\lambda$, quod conuenit cum *Coroll.* 4. *Theorem.* 6. Si praeterea ponatur $L=l$, fit longitudo penduli iſochroni ſeu $\lambda=\frac{ml}{m+2M+2\mu}$: Conuenit hoc cum problemate 1. quod *Pater meus* in *Comment. Acad. Petrop. Tom. III p.* 15. dedit: idque vnicuique manifeſtum erit, qui conſiderabit pondus P, quod ibi ab vna parte chordae eſt appenſum, hic eſſe ſummam ponderum G et F auctam dimidio pondere H.

Scholium Generale.

15. Poſſum ſimiles aequationes dare pro quatuor, quinque et quot libuerit corporibus: ſemper autem aequatio ad tot aſſurgit dimenſiones quot ſunt corpora,

et eſt plerumque admodum prolixa: attamen quia aequatio finalis oritur ex pluribus aequationibus radicalibus linearibus, lex apparet ex methodo qua vſus ſum, cuius auxilio ex tempore omnia determinari poſſunt, quae ad aequationem determinandam concurrunt.

Theorema 8.

DE FIGVRA CATENAE VNIFORMITER OSCILLANTIS.

Fig. 6. 16. *Sit catena* AC *vniformiter grauis et perfecte flexilis ſuſpenſa de puncto* A, *eaque oſcillationes facere vniformes intelligatur: peruenerit catena in ſitum* AMF; *fueritque longitudo catenae* $= l$: *longitudo cuiuscunque partis* FM $= x$, *ſumaturque* n *eius valoris, vt ſit*

$$1-\frac{l}{n}+\frac{ll}{4nn}-\frac{l^3}{4.9.n^3}+\frac{l^4}{4.9.16.n^4}-\frac{l^5}{4.9.16.25.n^5}+\text{etc.}=0:$$

Ponatur porro diſtantia extremi puncti F *ab linea verticali* $= 1$, *dico fore diſtantiam puncti vbicunque aſſumti* M *ab eadem linea verticali aequalem*

$$1-\frac{x}{n}+\frac{xx}{4nn}-\frac{x^3}{4.9.n^3}+\frac{x^4}{4.9.16n^4}-\frac{x^5}{4.9.16.25.n^5}+\text{etc.}$$

Scholium.

17. Per methodum, quam dedi in *Comm. Acad. Petrop. Tom. V. de reſolutione aequationum ſine fine progredientium*, inuenitur breuiſſimo calculo $n =$ proxime $0,691\,l$: Igitur ſi fuerit v. gr. punctum M in medio catenae, illud diſtabit a linea verticali praeterpropter duabus quintis, vel accuratius, trecentis nonaginta octo partibus milleſimis diſtantiae puncti infimi F ab eadem linea verticali. Habet autem littera n infinitos valores alios. Theo-

Theorema 9.

18. *Seruatis poſitionibus theorematis octaui, dico longitudinem penduli ſimplicis iſochroni cum oſcillante catena eſſe* $= n$, *ſeu ſubtangenti* CP *curuae* AF *in infimo puncto* F; *aut proxime aequalem ſexcentis nonaginta et vni partibus milleſimis totius catenae in caſu figurae ſextae.*

Corollarium.

19. Tardius igitur hoc modo oſcillatur catena, quam baculus rigidus aequabilis craſſitiei, eiusdem cum catena flexili longitudinis: huius enim oſcillationes iſochronae ſunt cum oſcillationibus penduli ſimplicis, quod in longitudine duos baculi trientes habet.

Scholium 1.

20. Poſtquam plurimos globulos plumbeos aequales ad diſtantias minimas aequales filo connexi, vt in paragrapho ſexto dictum, eo catenae loco vſus ſum ad experimentum inſtituendum: filum itaque globis oneratum ex puncto firmo ſuſpendi: deductaque ad latus extremitate F, eaque rurſus dimiſſa rationem obſeruaui, oſcillationibus iam vniformibus factis, inter diſtantias puncti extremi F et medii M a linea verticali AC, eamque rationem eandem deprehendi, quae paragrapho decimo ſeptimo indicatur: numerum quoque oſcillationum conuenire obſeruaui cum longitudine penduli ſimplicis iſochroni, quae in theoremate nono exhibetur.

Scholium 2.

21. Quia aequatio in theoremate octauo exhibita, nempe

$$1 - \frac{l}{n} + \frac{ll}{4nn} - \frac{l^3}{4.9.n^3} + \frac{l^4}{4.9.16.n^4} - \frac{l^5}{4.9.16.25.n^5} + \text{etc.} = 0.$$

habet infinitas radices reales, ideoque catena infinitis modis inflecti potest, vt oscillationes fiant vniformes: semper autem littera n minorem atque minorem valorem assumit, ita vt tandem pene euanescat, estque longitudo penduli simplicis isochroni constanter $= n$, seu subtangenti CP: vnde etiam oscillationes tandem fient veluti infinite celeres. Casus qui fingi possunt omnes huc redeunt, primo, vt catena lineam verticalem in alio puncto non intersecet praeter punctum suspensionis, qui repraesentatur figura sexta et pro quo conuenit longitudo penduli simplicis isochroni $n = 0,691\,l$, vt vidimus in antecedentibus: vel vt catena lineam verticalem in vno insuper puncto immobili secet, qualem figura septima indicat, vbi praedictum intersectionis punctum est B: in hoc casu est longitudo penduli isochroni $n = 0,13\,l$, et oscillationes numero viginti tres fient, dum in casu figurae sextae decem absoluuntur: linea CB erit proxime $= 0,19\,l$: CN puncto maximae excursionis M conueniens $= 0,47\,l$: ipsaque MN praeterpropter $= \frac{2}{5}$FC. Post hunc casum sequitur ille, qui figura octaua sistitur: vbi linea verticalis in duobus punctis fixis B et G a catena oscillante intersecatur: deinde cum tres fiunt intersectiones et sic porro. Arcus inter duo intersectionis puncta proxima incepti eo maiores sunt, quo altius positi:

siti: In catena autem infinite quasi longa arcus summus non differt sensibiliter a figura chordae musicae tensae, quia pondus istius arcus veluti nullum est respectu ponderis catenae totius. Neque difficile esse theoriam chordarum musicarum ex theoria ista deducere, quae plane conuenit cum illis, quas *Taylorus* et *Pater meus* dederunt, primus in *tractat. suo de methodo incrementorum*, alter in *Comment. Acad. Sc. Petrop. Tom. III.* Similes quoque intersectiones in chordis musicis, quae in catenis vibratis effici posse experimentum docet, quod chartula chordae quibusdam in locis imposita non decidat, cum chorda annexa vibratur.

Theorema. 10.

22. *Si catena* AC *e filo* LA *non graui suspensa fuerit, ponaturque longitudo partis ad libitum assumtae* FM $= x$: *distantia supremi puncti* N *a linea verticali* $= \mathfrak{C}$: *sicque porro* n *sumatur eius valoris vt sit* Fig. 9

$$1 - \frac{(l+\lambda)}{n} + \frac{(ll+2l\lambda)}{4nn} - \frac{(l^3+3ll\lambda)}{4.9.n^3} + \frac{(l^4+4l^3\lambda)}{4.9.16n^4} - \text{etc.} = 0,$$

dico in oscillationibus vniformibus fore vbique distantiam puncti M *a linea verticali aequalem,*

$$(1 - \frac{x}{n} + \frac{xx}{4nn} - \frac{x^3}{4.9.n^3} + \frac{x^4}{4.9.16n^4} - \text{etc.})\,\beta : (1 - \frac{l}{n} + \frac{ll}{4nn} - \frac{l^3}{4.9.n^3} + \frac{l^4}{4.9.16n^4} - \text{etc.})$$

adeoque distantiam puncti infimi F *futuram esse aequalem*

$$\beta : (1 - \frac{l}{n} + \frac{ll}{4nn} - \frac{l^3}{4.9n^3} + \frac{l^4}{4.9.16n^4} - \text{etc.}).$$

Erit porro longitudo penduli simplicis isochroni, vt antea $= n$, *seu in casu simplicissimo proxime,* $=$

$$\frac{211^4+844l^3\lambda+1536ll\lambda\lambda+1440l\lambda^3+576\lambda^4}{3941^3+9128ll\lambda+11521\lambda\lambda+576\lambda^3}$$

Coroll.

Corollarium.

23. Sit v. gr. longitudo fili eadem quae longitudo catenae, id eſt, $l = \lambda$, erit longitudo penduli ſimplicis iſochroni ſeu n proxime $= 1, 56l$: diſtantiaeque punctorum extremorum F et N a linea verticali ſe fere habebunt vt 11 ad 1: plures tamen praeter hunc alii caſus ſatisfacient ſimiles illis, quos in paragrapho 21. enumerauimus: ita poſt dictum caſum ſequitur is, quo fit n fere $= \frac{1}{5}l$; punctumque C excurſiones contrarias facit cum puncto A atque triplo maiores.

Theorema II.

Fig. 10. 24. *Poſitis omnibus vt in theoremate decimo, ſi catena in origine* A *pondere onerata fuerit tanto, quantum ineſt catenae parti longitudinis* L; *erunt omnia vt in eodem theoremate decimo, ſi modo nunc fiat*

$$1 - \frac{(L\lambda + Ll + l^2 + l\lambda)}{n(L+l)} + \frac{(4\,l\,L\lambda + l^3 + 2\,l\lambda)}{4nn.(L+l)} - \frac{(9\,l^2 L\lambda + L l^3 + l^4 + 3\,l^3\lambda)}{4.9n^3(L+l)} + \frac{(16\,l^3 + L\lambda + Ll^2 + l^3 + 4\,l^2\lambda)}{4.9.16\,n^4(L+l)} - etc. = 0.$$

Fuerit v. gr. $L = \lambda = l$, *et fiet* $1 - \frac{2l}{n} + \frac{ll}{nn} - \frac{7l^3}{36n^3} + \frac{11l^4}{576n^4} - etc. = 0$, *hincque habebitur proxime* $n = 1, 37l$; *arculi autem a punctis catenae infimo et ſupremo deſcripti erunt vt* 100 *ad* 39.

Theorema 12.

GENERALE PRO CATENIS VTCVNQVE INAEQVALITER CRASSIS ATQVE GRAVIBVS.

25. *Fuerit denique catena vtcunque inaequalis ſtructurae ita vt poſito longitudine partis catenae* FM $= x$, *ſit*

ſit pondus eius ξ, *intelligendo per* ξ *qualemcunque functionem ipſius* x: *vocetur porro diſtantia puncti* M *ad libitum aſſumti a linea verticali* $= y$: *dico curuaturam* F M N *hac d finiri aequatione, ſumta* dx *pro conſtante,* $\int y\, d\xi = -\frac{n\xi dy}{dx}$: *huicque aequationi poſtquam in quolibet caſu particulari recte ſatisfactum fuerit, fore longitudinem penduli ſimplicis iſochroni* $= n$.

Corollaria.

26. I. In catenis aequabilis craſſitiei quarum pondus integrum $= 1$, eſt $\xi = \frac{x}{l}$: pro his igitur talis inſeruit aequatio $\int y\, dx = -\frac{nxdy}{dx}$, ex qua omnia deduci poſſunt, quae a paragrapho decimo ſexto ad vigeſimum tertium dicta ſunt.

II. Fuerit pondus catenae integrae rurſus $= 1$: longitudo eius $= l$: ſitque vbique $\xi = \frac{xx}{ll}$; erunt diſtantiae punctorum F et M a linea verticali vt 1 ad ſummam huius ſeriei

$$1 - \frac{x}{n} + \frac{xx}{3nn} - \frac{x^3}{3.6n^3} + \frac{x^4}{3.6.10n^4} - \frac{x^5}{3.6.10.15n^5} + \text{etc.}$$

Eſt autem n longitudo talis, vt ſit

$$1 - \frac{l}{n} + \frac{ll}{3nn} - \frac{l^3}{3.6n^3} + \frac{l^4}{3.6.10n^4} - \frac{l^5}{3.6.10.15n^5} + \text{etc.} = 0.$$

cui conditioni proxime ſatisfit, cum ſumitur $n = \frac{11}{20}l$; tantaque eſt longitudo penduli ſimplicis iſochroni: erit autem excurſio puncti infimi F fere tripla eius quam facit punctum medium M.

Scholium Generale.

27. In omnibus quas conſideraumus oſcillationibus diſtantiae ſingulorum punctorum a linea verticali,

quasi infinite parvae censendae sunt ratione longitudinis fili corpora connectentis aut catenae, imo etiam ratione arcuum catenae, de quibus in paragrapho 21. diximus, ita vt v. gr. in figura septima etiam distantia FC infinities minor esse debeat linea CB, ad quod animus est aduertendus in instituendis experimentis, quamuis a magnitudine oscillationum non facile error admodum notabilis oriatur.

Si haec pendula in turbinem agantur, eandem figuram induent, quam ipsis in oscillationibus assignauimus, et gyros suos duplo absoluent tempore, quo oscillationes in eodem perficiunt plano.

PRO-

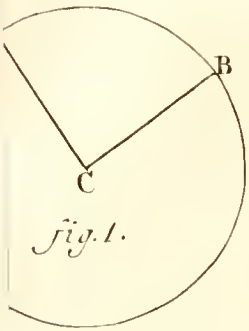


fig. 1.

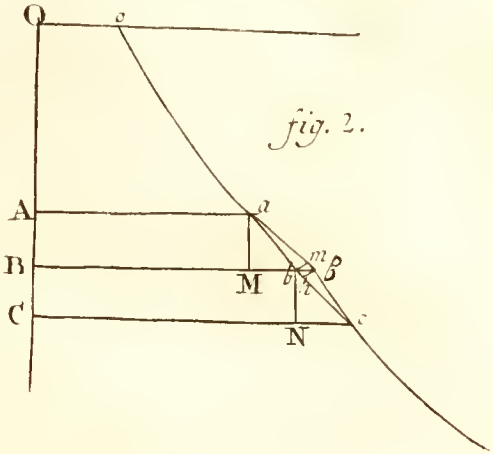


fig. 2.

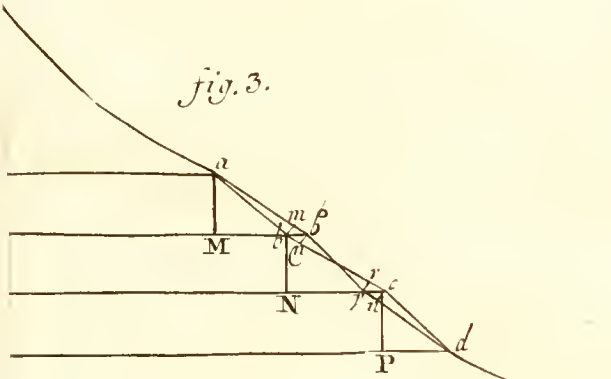


fig. 3.

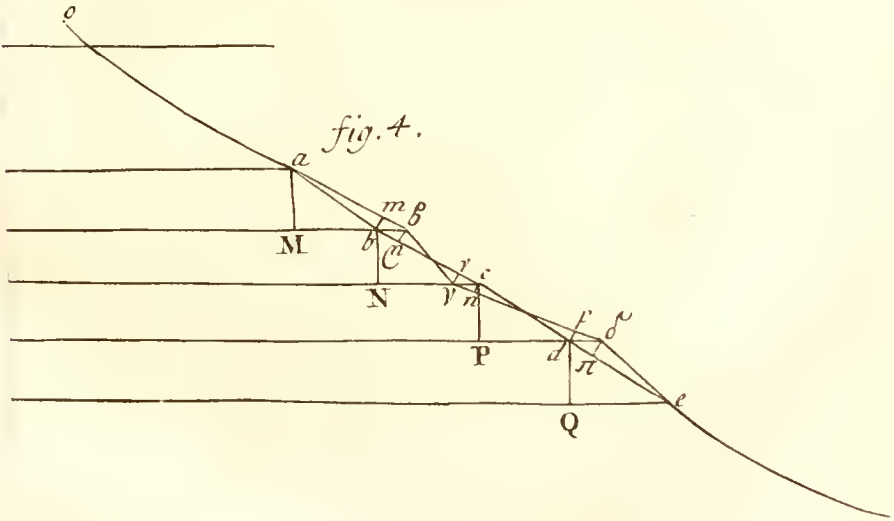


fig. 4.

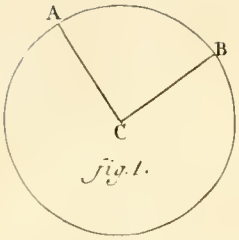


fig. 1.

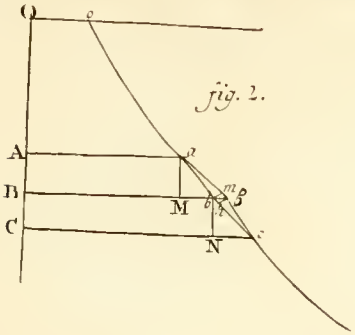


fig. 2.

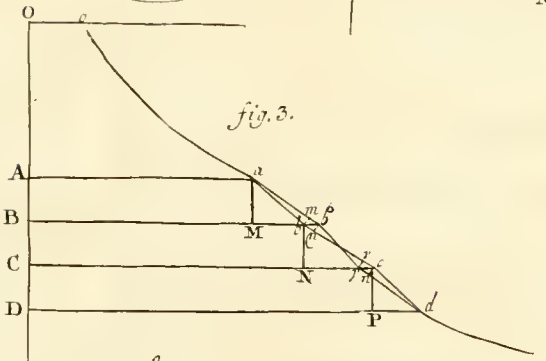


fig. 3.

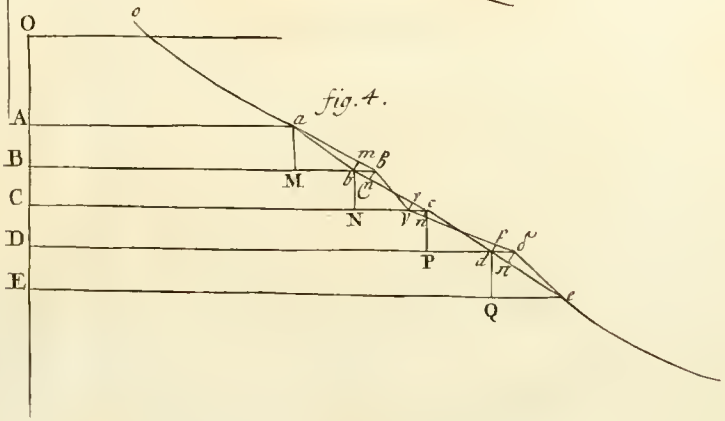


fig. 4.

PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI IN LATISSIMO SENSV ACCEPTI SOLVTIO GENERALIS.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

PRoblemata, quae curuas maximi minimiue proprietate praeditas requirunt, et adhuc a Geometris tractata sunt, ad duas classes commode referuntur. Quarum prima omnia ea complectitur, quae inter omnes prorsus curuas eam postulant, quae maximi vel minimi cuiusdam habeat proprietatem. Ad alteram vero classem omnia illa pertinent problemata, quae non ex omnibus, sed iis tantum curuis, quae communi quadam gaudent affectione, maximi minimiue proprietatem habentem determinare iubent. Comprehenduntut hae posteriora omnia in famoso isoperimetrico problemate latiori sensu accepto, cuius solutionem Celeberrimi Geometrae *Iacobus* et *Ioannes Bernoullii*, *Taylorus* et *Hermannus* iam pridem dederunt. Quanquam enim hi Viri inter omnes tantum curuas eiusdem longitudinis, eam, quae maximi minimiue proprietatem habeat, quaesiuerunt; tamen eorum methodi facile ad eas quoque quaestiones extendi possunt, quae quaesitam curuam ex omnibus alia communi proprietate praeditis requirunt. Vt si ex omnibus curuis, quae circa axem conuersae solida generant aequalia, ea inuenienda sit, quae solidum minimae superficiei producat. Tabula VIII

§. 2. Prioris generis problemata duo potiſſimum agitata ſunt, ad definiendas curuas celerrimi deſcenſus et minimae reſiſtentiae, quae vtique inter omnes prorſus curuas ſuam proprietatem maximo ſiue minimo poſſideut gradu. Perſpicuum autem eſt, quae curua inter omnes minimam patiatur reſiſtentiam, vel celerrimum producat deſcenſum, eandem hanc praerogatiuam habere inter omnes curuas eiusdem longitudinis, vel alia quacunque proprietate praeditas. Viciſſim vero non valet conſequentia, vt, quae inter omnes curuas eiusdem longitudinis eſt brachyſtochrona, eadem inter omnes omnino curuas talis ſit; Illius enim generis dantur innumerabiles, cum tamen in hoc praeter cycloidem nulla alia ſatisfaciat. Ex quo colligitur, priorem claſſem eſſe quaſi ſpeciem poſterioris, hancque multo latius patere quam illam.

§. 3. Haec conſiderans in eam incidi cogitationem, an forte tertia quaedam claſſis exiſtat, cuius ſecunda tantum eſſet aliqua ſpecies? et hoc modo progrediendo, an dentur etiam quarta, quinta, pluresque hoc ordine ſequentes huiusmodi claſſes? Atque reipſa ita ſe rem habere deprehendi: cognoui enim ad has vlteriores claſſes perueniri, ſi curuae eae, ex quibus, quae maximi minimiue proprietatem habeat, determinari debet, plures vna habuerint affectiones: vt ſi inter omnes curuas eiusdem longitudinis et eandem comprehendentes aream ea requiratur, quae circa axem conuerſa maximum generet ſolidum. Aequatio autem, quam pro hac curua adeptus ſum, magis erat generalis, quam ſi curuas

uas tantum vel eiusdem longitudinis, vel eiusdem capacitatis posuissem. Atque sine dubio aequatio magis generalis proditura fuisset, si ad duas has proprietates adhuc vnam pluresue superaddidissem. Ex quibus, quod forte admodum paradoxum videbitur, intelligitur, quo magis curuarum propositarum numerus restringatur, eo plures quaesito satisfacientes reperiri.

§. 4. Has igitur classes in sequentibus quaestionibus complectar maxime vniuersalibus. I *Ex omnibus prorsus curuis eam determinare, quae proprietatem* A *maximo vel minimo gradu contineat.* II. *Ex omnibus curuis proprietate A aequaliter praeditis, eam determinare, quae proprietatem* B *maximo vel minimo gradu contineat.* III. *Ex omnibus curuis et proprietate* A *et proprietate* B *aequaliter praeditis, eam determinare, quae proprietatem* C *maximo minimoue gradu contineat.* IV. *Ex omnibus curuis proprietatibus* A *et* B et C *singulis aequaliter praeditis, eam determinare, quae proprietatem* D *maximo minimoue gradu contineat.* Simili modo quinta classis curuas quatuor proprietatibus praeditas contemplabitur et ita porro sequentes.

§. 5. Harum quaestionum probe est notanda proprietas ista, quod proprietates curuarum datarum cum ea, quam quaesita habere debet, possint commutari. Ita secunda quaestio, nam in prima haec commutatio locum habere nequit, congruit cum hac: *Ex omnibus curuis proprietate* B *praeditis, eam determinare, quae proprietatem* A *maximo minimoue gradu habeat.* Et ter-

tia quaeſtio tribus modis poteſt commutari, prout curua inuenienda vel proprietatem A vel B vel C in ſummo quodam gradu continere debeat, dum interim curuae propoſitae duas reliquas proprietates aequaliter poſſideant. Hoc autem ex modo ſoluendi apparet, cum ea curua maximi vel minimi habeat proprietatem, quae eandem in ſitu proximo retinet; id quod etiam in curuas eadem proprietate gaudentes competit.

§. 6. Proprietas vero maximi vel minimi, quam curua in his problematibus quaeſita habere debet, ita intelligenda eſt, vt nulla intra eosdem terminos detur curua, niſi ipſa quaeſita, quae praeſcriptas habeat affectiones, et tam magno vel tam paruo gradu propoſitam proprietatem contineat. Ita cyclois hanc habet naturam, vt nulla alia curua intra eosdem terminos dari poſſit, ſuper qua corpus deſcendens ab altero ad alterum minori tempore perueniat. Et praeter catenariam per duo puncta transeuntem, nulla datur alia curua eiusdem longitudinis et intra eadem duo puncta contenta, cuius centrum grauitatis in inferiore loco ſit poſitum. Aſſumi vero poſſunt pro terminis his duo quaecunquae puncta, per quae curua quaeſita tranſit. Sicque in circulo, qui vt conſtat, eſt omnium figurarum capaciſſima, aſſumtis duobus quibuscunque punctis AB, non poteſt inueniri inter ea puncta alia curua eiusdem longitudinis, quae maiorem ſectorem quam ABC, comprehendat. Fig. 1.

§. 7. Ad problemata primae claſſis ſoluenda ſufficit duo curuae elementa contigua conſiderare, quemadmodum

dum ex solutionibus, quae passim inueniuntur, lineae brachystochronae, et solidi minimae resistentiae apparet. Secundae vero classis problemata resolui non possunt nisi tria elementa curuae in computum ducantur. Ex hisque collegi ad solutionem problematum ad tertiam classem pertinentium quatuor opus esse curuae elementis. Atque ita porro pro quarta classe quinque elementa, pro quinta autem sex requiruntur et sic deinceps. Ex quo intelligitur solutionem problematum continuo euadere difficiliorem, quo magis iuxta has classes progrediaris. Difficultas quidem in prolixitate calculi tantum consistit, qui eo fit operosior, quo plura elementa curuae debent considerari. Vehementer is autem poterit abbreuiari si debita compendia adhibeantur.

§. 8. Quo autem facilius intelligatur, qua methodo in singulis classibus vti conueniat, iis etiam quas hic non attingam, plurimum iuuabit duas priores etiam classes percurrere. Quanquam hae vero iam satis sunt tractatae, vt vix quicquam noui in iis detegi posse videatur; tamen eas methodo paulisper diuersa et multo latius patente sum persecuturus, quae ad sequentes etiam classes magis est accommodata. Praeterea quoque haec inde nascetur vtilitas, quod quaelibet proprietas, quam curua quaesita habere debet, in prima et secunda classe ad calculum perducta, in reliquis etiam si parum immutetur, possit inseruire: Multo autem maiore labore opus esset hunc calculum in sequentibus demum classibus de nouo persicere.

§. 9.

Fig. 2. §. 9. Oporteat igitur primum inter omnes prorſus curuas determinare eam oa, quae datam proprietatem maximo vel minimo gradu contineat. Ad hoc praeſtandum ſumatur pro lubitu axis OA, ad quem curua quaeſita referatur. Accipiantur huius elementa AB, BC aequalia, hiſque reſpondeant in curua ipſa duo elementa ab et bc, quae in applicatis praebeant elementa bM, et cN. Vocetur arcus oa, s; abſciſſa OA, x; applicata Aa, y. Erunt $AB = BC = dx$, $bM = dy$, et $ab = ds$, Atque porro $cN = dy + ddy$ et $bc = ds + dds$. Deinde manifeſtum eſt, quam maximi minimiue proprietatem habeat tota curua oa, eandem habere debere quamuis eius partem; ergo etiam duo elementa ab et bc. Quamobrem non duci poterunt alia duo elementa vt $a\beta$ et βc, inter terminos a et c, quae contineant praeſcriptam proprietatem maiore vel minore grada. Cum vero maximi et minimi proprietas in hoc conſiſtat, vt omnibus in ſitum proximum translatis, proprietas praeſcripta ſtatum ſuum tamen retineat; conſiderari debebunt duo elementa proxima $a\beta$ et βc intra eosdem terminos a et c, contenta. In haec igitur praeſcripta proprietas aeque competere debebit, ac in priora ab et bc. Ex quo poſitio elementorum ab et bc hincque ipſa curua quaeſita oa innoteſcet.

§. 10. In hoc autem ſitu proximo ab transit in $a\mathfrak{b}$, bc in $\mathfrak{b}c$; et Mb in $M\mathfrak{b}$, ac cN in $cN - b\mathfrak{b}$. Creſcit igitur elementum ab particula $\mathfrak{b}m$, elementum vero bc decreſcit particula bn. Similiter bM augetur parti-

particula $b\beta$, et cN minuitur particula $b\beta$. Priores vero particulae βm et bn possunt etiam ad $b\beta$ reduci per similitudinem triangulorum βbm, baM et βcn, cbN, ex qua reperitur $\beta m = \frac{bM}{ab} b\beta$, et $bn = \frac{cN}{ac} \beta$. Situ ergo proximo migrat ab in $ab + \frac{bM}{bc} b\beta$; bc in $bc - \frac{cN}{bc} b\beta$; bM in $bM + b\beta$; et cN in $cN - b\beta$, abscissae vero elementa AB et BC interim manent invariata. Deinde etiam ipsa applicata Bb crescit elemento $b\beta$, et arcus oab particula βm, i. e. $\frac{bM}{ab} b\beta$. Quae, quanquam saepissime negligi possunt, tamen in genere retineri debent.

§. 11. Cum autem praescripta proprietas, quam curua oa maximo vel minimo gradu continere debet, tanta debeat reperiri in elementis ab, bc, quanta in proximis $a\beta$, βc; in vtroque casu eam proprietatem ad calculum reuocare conueniet, et expressiones resultantes a se inuicem subtrahere; id enim, quod restat aequale erit ponendum nihilo. Singuli vero huius residui termini vel affecti erunt particula $b\beta$, vel βm et bn; quae autem, quia ad $b\beta$ reduci possunt, totum residuum erit per $b\beta$ diuisibile, quo facto prodibit aequatio, in qua nulla prorsus quantitas a puncto β pendens reperietur, sed tota ex x, y et s cum constantibus constabit. Ex hac igitur natura curuae quaesitae determinabitur.

§. 12. Ponamus curuam oa eam habere debere proprietatem, vt in ea $\int x^n ds$ minorem habeat valo-

rem, quam in alia quaecunque linea per puncta o et a transeunte. Hanc eandem igitur proprietatem habebunt elementa ab, bc. Quare $OA^n.ab + OB^n.bc$ debebit etiam esse minimum vel aequale huic quantitati $OA^n.a\beta + OB^n.\beta c$. His a se inuicem subtractis restabit haec aequatio $OA^n.\beta m = OB^n.bn$, vel loco βm et bn valoribus inuentis substitutis, haec $\frac{OA^n.bM.b\beta}{ab} = \frac{OB^n.cN.b\beta}{bc}$, siue $\frac{OA^n.bM}{ab} = \frac{OB^n.cN}{bc}$. Quae aequatio ita est comparata, vt posterius membrum sit ipsum prius differentiali suo auctum. Propterea differentiale huius $\frac{OA^n.bM}{ab}$ erit $= o$, ideoque ipsa haec quantitas aequalis erit quantitati constanti, quae sit a^n. In symbolis igitur sequens habebitur aequatio $x^n dy = a^n ds$, ex qua curua quaesita cognoscitur. Perspicitur ex his simul, si talis requiratur curua, vt $\int P ds$, vbi P functionem quamcunque ipsius x designat, in ea sit minimum, proditurum esse aequationem hanc $P dy = A ds$, posito A pro constanti homogenea ipsi P. At si P fuerit functio ipsius y, permutatis coordinatis x et y, prodibit aequatio $P dx = A ds$.

§. 13 Si requiratur vt in curua quaesita sit semper $\int x^m y^n ds$ maximum vel minimum, erit $OA^m.Aa^n.ab + OB^m.Bb^n.bc = OA^m.Aa^n.a\beta + OB^m.B\beta^n.\beta c = OA^m.Aa^n.a\beta + OB^m.B\beta^{n-1}.b\beta.\beta c + OB^m.B\beta^{n-1}.Bb.\beta c$, posito $Bb + b\beta$ loco $B\beta$. Ex qua aequatione oritur ista

$OB^m.$

$\frac{OB^m.Bb^n.cN.b\beta}{bc} - \frac{OA^m.Aa^n.bM.b\beta}{ab} = n.\ OB^m.Bb^{n-1}.bc.b\beta - n.OA^m.Aa^{n-1}.ab.b\beta$. Prior autem pars vbique per $b\beta$ diuisa, exprimit differentiale huius quantitatis $\frac{OA^m.Aa^n.bM}{ab}$. Quare symbolis substitutis, prodibit ista aequatio $d.\frac{x^m y^n dy}{ds} = nx^m.y^{n-1}ds$, quae sumendo ibi re ipsa differentiale, et pro dds ponendo valorem $\frac{dyddy}{ds}$, abit in hanc $\frac{xydxdddy}{ds^2} + my\,dy - nx\,dx = o$. Reduci haec quidem ad differentialem aequationem primi gradus potest; sed ea fit ita complicata, vt, an separari possit, non appareat. Si $\int x^m s^n ds$ debeat esse maximum vel minimum, reperitur haec aequatio $d.\frac{x^m s^n dy}{ds} = nx^m s^{n-1} dy$, quae porro mutatur in istam $x\,dx\,ddy + m\,ds^2\,dy = o$. Ex quo apparet exponentem n ex calculo euanescere, ita vt eadem prodeat curua, ac si requireretur $\int x^m ds$ pro maximo; ea vero integrando reducitur ad hanc $x^m dy = a^m ds$, vt iam supra est inuentum.

§. 14. Oporteat inuenire curuam, in qua sit $\int \frac{ds^m dy^n}{dx^{m+n-1}}$ maximum vel minimum. Hic statim appareret, quia dx ponitur constans, id tantum effici debere vt $\int ds^m dy^n$ fit minimum vel maximum. Propterea erit $ab^m.bM^n + bc^m.cN^n = a\beta^m.\beta M^n + \beta c^m.(cN - b\beta)^n$. Hinc resultat ista aequatio $nab^m.bM^{n-1} + m.$

$ab^{m-2}.bM^{n+1} = n.bc^m.cN^{n-1} + m.bc^{m-2}.cN^{n+1}$, ex qua iterum concluditur $nab^m.bM^{n-1} + m.ab^{m-2}bM^{n+1}$ debere esse constans. Quamobrem pro curua quaesita haec inuenietur aequatio $nds^m dy^{n-1} + m ds^{m-2} dy^{n+1} = a dx^{m+n-1}$, quae semper est pro linea recta. Si vero pro maximo minimoue haec quantitas data fuisset, $\frac{\int x^k ds^m dy^n}{dx^{m+n-1}}$, tum prodiisset ista aequatio $nx^k ds^m dy^{n-1} + mx^k ds^{m-2} dy^{n+1} = a^k dx^{m+n-1}$ Atque generatim si proponeretur ista quantitas $\frac{\int P ds^m dy^n}{dx^{m+n-1}}$ curua quaesita sequenti determinabitur aequatione $nP ds^m dy^{n-1} + mP ds^{m-2} dy^{n+1} = A dx^{m+n-1}$; vbi P denotat functionem ipsius x quamcunque. Si denique id, quod maximum vel minimum esse debet, habuerit hanc formam $s\int x ds$, reperietur eodem modo, scilicet elementis ab et bc ita constituendis vt $\int(ds\int x ds + sx ds)$ fit maximum vel minimum, haec aequatio, $sds^2 dy + dx\, ddy(sx + \int x ds) = 0$.

§. 15. His autem primariis casibus primae classis expositis, pergo ad secundam, in qua non ex omnibus prorsus curuis, sed iis solum quae communem quandam habent proprietatem, determinari debet curua, quae maximi vel minimi quandam habeat proprietatem. Quaeri igitur oporteat curuam oa, quae inter omnes curuas affectionem quandam A aequaliter continentes, habeat aliam quandam proprietatem B in maximo vel minimo gradu. Ad hoc problema soluendum tria necesse est

eſt conſiderare elementa curuae quaeſitae. Hancobrem in axe pro lubitu aſſumto OA accipiantur tria elementa AB, BC, CD, quae ſint inter ſe aequalia, hisque reſpondeant in curua tria elementa ab, bc, et cd. Ducantur porro, vt ante, applicatae Aa, Bb, Cc, Dd, axique parallelae aM, bN, cP. Dictis ergo OA, x; Aa, y; et oa, s: erit $AB = BC = CD = dx$: $bM = dy$; et $ab = ds$, porroque $cN = dy + ddy$; $bc = ds + dds$; atque $dP = dy + 2ddy + d^3y$ et $cd = ds + 2dds + d^3s$. Fig 3.

§. 16. Deinde ducantur alius cuiusdam curuae per puncta a et d transeuntis, elementa $a\beta$, $\beta\gamma$, et γd, ad eadem axis elementa relata. Haec autem ita debent eſſe comparata, vt proprietatem A aeque contineant ac priora ab, bc, et cd; aliae enim hic curuae non conſiderantur, niſi in quas proprietas A aequaliter competat. At nihilominus haec elementa infinitis modis inflecti poſſunt, quia a poſitione duorum punctorum β et γ pendent. Quocirca altera proprietas B adhuc in computum duci poteſt; quod, ſi duo tantum elementa vt in antecedente caſu aſſumta fuiſſent, fieri non potuiſſet. At ex natura maximorum et minimorum elementa $a\beta$, $\beta\gamma$, γd proprietatem B aeque complecti debent, ac illa ab, bc, cd, ex quo intelligitur curuam quaeſitam oa prodire, ſe hae duae elementorum triades ita aſſumantur, vt vtramque proprietatem A et B aequali gradu comprehendant; in hocque ſimul ratio commutationis proprietatum A et B, cuius mentio iam eſt facta, conſiſtit.

§. 17. Quando autem elementa ab, bc, cd in

ſitum proximum $a\beta$, $\beta\gamma$, γd transferuntur, augetur ab particula βm, bc minuitur ſumma particularum $b\mu + c\nu$, et cd iterum augetur particula γn. Similiter bM creſcit particula $b\beta$, et cN decreſcit ſumma $b\beta + c\gamma$, atque dP creſcit particula $c\gamma$. Poſſunt vero illa etiam accrementa et decrementa reduci ad $b\beta$ et $c\gamma$ per ſimilia triangula, fit enim $\beta m = \frac{bm \cdot b\beta}{ab}$, $b\mu = \frac{cN \cdot b\beta}{bc}$: $c\nu = \frac{cN \cdot c\gamma}{bc}$ et $\gamma n = \frac{dP \cdot c\gamma}{cd}$. Propter duas autem proprietates A et B propoſitas, quae communes eſſe debent vtrique elementorum triadi, prodibunt duae aequationes, quarum ſinguli termini affecti erunt vel particula $b\beta$ vel $c\gamma$. His igitur eliminatis elicitur aequatio, in qua nullae amplius inſunt quantitates a punctis β et γ pendentes, ſeu ſymbolis introductis, tota conſtabit ex x, y, s et conſtantibus. Ex qua propterea curua quaeſita cognoſcitur.

§. 18. Duae vero illae aequationes, quae ex conſideratione duarum propoſitarum proprietatum A et B oriuntur, huiusmodi habebunt formam $P.b\beta - Q.c\gamma = o$ et $R.b\beta - S.c\gamma = o$, in quibus quantitates Q et S plerumque ita ſunt comparatae, vt ſit $Q = P + dP$ et $S = R + dR$. Si vero huiusmodi formam non habuerint, poterunt ſemper multiplicando vel diuidendo aequationes ad talem reduci. Hoc ſi factum erit, dico fore ſemper $P + aR = o$, vbi pro a quantitas conſtans quaecunque accipi poteſt. Nam expulſis $b\beta$ et $c\gamma$ oritur iſta aequatio $QR = PS$, quae ſubſtitutis $P + dP$ et $R + dR$ loco Q et S, abit in hanc $R\,dP = P\,dR$

ex

ex qua integrata prouenit $P+aR=o$. Haec aequatio hoc modo producta erit pro ipsa curua quaesita; quare si illae aequationes ex proprietatibus propositis deductae praescripto modo instituantur, in promtu erit in quouis casu aequationem curuae quaesitae exhibere.

§. 19. Sufficiet igitur pro singulis proprietatibus, quae proponi possunt, aequationes dicto modo adornasse vt habeant formam $P.b\beta-(P+dP).c\gamma=o$. Huiusmodi enim duabus coniunctis obtinetur aequatio pro curua quaesita; dummodo eae aequationes ex proprietate, quae omnium curuarum ex quibus quaesita determinanda est, communis esse debet, et ex ea, quam quaesita maximo gradu continere debet, eliciantur. Proposita ergo sit primo quantitas $\int y^n dx$, quae vel communis esse debeat curuarum datarum, vel maxima minimaue in quaesita: vtrumque enim eodem redit. Hanc ob rem ob dx constans, debebit esse $Aa^n+Bb^n+Cc^n=Aa^n+B\beta^n+C\gamma^n$, vnde prodit ista aequatio $B\beta^{n-1}.b\beta-C\gamma^{n-1}.c\gamma=o$, quae praescriptam iam habet proprietatem. Atque in symbolis quantitas ipsi P respondens est y^{n-1}. Si positum fuisset $\int x^n dy$ prodiisset x^{n-1} respondens quantitati P. Et ex assumta quantitate $\int T dx$, designante T functionem quamcunque ipsius y, inuenietur pro littera P haec fractio $\frac{dT}{dx}$. Simili modo prodiisset $\frac{Td}{dy}$ ex $\int T dy$, si T fuerit functio ipsius x.

§. 20. Exprimat $\int x^n ds$ proprietatem, quae in elementis ab, bc, cd, et $a\beta, \beta\gamma, \gamma d$ aequaliter inesse debeat; erit $OA^n.ab+OB^n.bc+OC^n.cd=$

OA^n

$\mathrm{O}\,\mathrm{A}^n.\,a\beta + \mathrm{O}\,\mathrm{B}^n.\,\beta\gamma + \mathrm{O}\,\mathrm{C}^n\,\gamma d$. Eſt autem $a\beta - ab = \frac{bM.\beta}{ab}$, $bc - \beta\gamma = \frac{cN.b\beta}{bc} + \frac{cN.c\gamma}{bc}$, et $\gamma d - cd = \frac{dP.c\gamma}{cd}$, quare iſta prodit aequatio $\mathrm{O}\,\mathrm{A}^n.\frac{bM.b\beta}{ab} - \frac{\mathrm{O}\,\mathrm{B}^n.cN.b\beta}{bc} - \frac{\mathrm{O}\,\mathrm{B}^n.cN.c\gamma}{bc} + \frac{\mathrm{O}\,\mathrm{C}^n.dP.c\gamma}{cd} = 0$. Haec iam habet requiſitam proprietatem, eſt enim factor in $b\beta$ ductus cum ſuo differentiali, aequalis facti per quem $-c\gamma$ eſt multiplicatum. In hoc igitur caſu eſt $P = \frac{\mathrm{O}\,\mathrm{A}^n.bM}{ab} - \frac{\mathrm{O}\,\mathrm{B}^n.cN}{bc}$, ſiue huius negatiuo, quod in ſymbolis eſt d. $\frac{x^n dy}{ds}$. Simili modo ſi propoſitum fuiſſet $\int X ds$ et X denotat functionem quamcunque ipſius x, repertum fuiſſet pro P, d. $\frac{X dx}{ds}$. At ſi proponatur $\int y^n ds$, tum reperietur pro P, d. $\frac{y^n dy}{ds} - ny^{n-1} ds$. Atque ex hoc porro perſpicitur ex quantitate $\int Y ds$, deſignante Y functionem quamcunque ipſius y, repertum iri pro P hanc quantitatem d. $\frac{Y dy}{ds} - \frac{dY ds}{dy}$.

§. 21. His attente inſpiciendis poterimus, quae quantitas ipſi P reſpondens proditura ſit, definire, ſi generaliores formulae accipiantur. Vt propoſita ſit formula $\int T dx$, vbi T denotet functionem quamcunque ipſarum x et y, ſitque $dT = +M dy + N dx$, inuenitur $P = +M dx$. Atque propoſita formula $\int T dy$ manente T vt ante, erit $P = -N dx$. Denique ſi propoſita fuerit formula $\int T ds$, reperietur $P = +M ds - \mathrm{d}.\frac{T dy}{ds} = \frac{M dx^2}{ds} - \frac{N dx dy}{ds} - T\,\mathrm{d}.\frac{dy}{ds}$. Dedi hic hos valores, prout

prout calculo immediate inueniuntur, ſi proprietas praeſcripta ad elementa ab, bc, cd, accommodata ſubtrahatur ab eadem ad elementa $a\beta$, $\beta\gamma$, γd accommodata; neque ſigna mutaui, neque per quantitates conſtantes vel multiplicaui vel diuiſi. Ex hoc non parua naſcitur vtilitas iſta, quod valor ipſius P etiam inueniri queat, ſi formula praeſcripta habeat valorem compoſitum, vt $\int T\,ds + \int t\,dy$. Si enim fuerit $dt = m\,dy + n\,dx$, manente dT vt ante, erit P ſumma eorum, quae pro quolibet membro ſeorſim inueniuntur, ſcilicet $P = \frac{M\,dx^2}{ds} - \frac{N\,dx\,dy}{ds} - T\,d.\frac{dy}{ds} - n\,dx$.

§. 22. Hi ſunt caſus, quando in formula propoſita quantitas T, quae vel in dx vel dy vel ds eſt ducta, eſt functio quaecunque ipſarum x et y. In hisque, vti conſtat, ſtatim ad aequationem peruenitur, quae formam habet $P.b\mathfrak{C} - (P + dP)c\gamma$. At ſi etiam s in T contineatur, non peruenitur ad huiusmodi aequationem, ſed ea demum ad talem debet reduci. Vt ſit propoſita haec formula $\int s^n dx$ oportebit eſſe ob dx conſtans, $o\alpha^n + ob^n + oc^n = o\alpha^n + o\beta^n + o\gamma^n$, ſeu $ob^n + oc^n = o\mathfrak{C}^n + o\gamma^n$. Eſt vero $o\mathfrak{C} = ob + \mathfrak{C}m = ob + \frac{bM.b\mathfrak{C}}{ab}$, et $o\gamma = oc + \mathfrak{C}m - \mathfrak{C}\mu - c\nu = oc + \frac{bM.b\mathfrak{C}}{ab} - \frac{cN.b\mathfrak{C}}{bc} - \frac{cN.c\gamma}{bc}$. Ergo $o\mathfrak{C}^n - ob^n = \frac{n.ob^{n-1}.bM.b\mathfrak{C}}{ab}$ et $o\gamma^n - oc^n = \frac{noc^{n-1}bM.b\mathfrak{C}}{ab} - \frac{n.oc^{n-1}.cN.b\mathfrak{C}}{bc} - \frac{n.oc^{n-1}.cN.c\gamma}{bc}$. Quorum reſiduorum ſumma, cum

debeat euaneſcere erit $((ob^{n-1}+oc^{n-1})\frac{bM}{ab}-\frac{oc^{n-1}.cN}{bc}=)$ $b\mathfrak{C}=\frac{oc^{n-1}.cN.c\gamma}{bc}$. Ponatur $\frac{bM}{ab}=q$, erit $\frac{cN}{bc}=q+dq$, et pro ob poſito s, erit $oc=s+ds$, habebiturque $(2s^{n-1}q+n-1)s^{n-2}qds-s^{n-1}(q+dq)-(n-1)s^{n-2}qds)b\mathfrak{C}=(s^{n-1}q+s^{n-1}dq+(n-1)s^{n-2}qds)(\gamma$, Ex qua formatur iſta aequatio $P.b\mathfrak{C}=P.c\gamma(\frac{sq+sdq+(n-1)qds}{sq-sdq}$. Debet igitur eſſe $P(\frac{sq+sdq+(n-1)qds}{sq-sdq}=P+dP$, vt prodeat requiſitus valor ipſius P. Fiet autem ex iſta aequatione $2Psdq+(n-1)Pqds=sqdP$. Huiusque integrale $s^{n-1}q^2=P$, ſeu $P=\frac{s^{n-1}dy^2}{ds^2}$.

Si propoſita fuiſſet haec formula $\int Sdx$, vbi S denotat functionem quamcunque ipſius s, prodiiſſet $P=\frac{dSdy^2}{ds^2}$. Et huic formulae $\int SXdx$ reſpondet valor $P=\frac{XdSdy^2}{ds^2}$. Atque generatim ſi fuerit T functio quaecunque ipſarum s,y et x; erit poſito $dT=Pds+Mdy+Ndx$, $P=c^{\int\frac{Ldq}{Lq+M}}(Lq+M)$, ſcripto q loco $\frac{dy}{ds}$.

§. 23. Propoſitus nunc ſit hic caſus, quo $\int Tds$ (vbi T vt ante eſt functio quaecunque ipſarum x,y et s, et $dT=Lds+Mdy+Ndx$) in duabus curuis proximis debeat eſſe idem. Erit ergo $T.ab+(T+dT)bc+(T+2dT+ddT).cd=T.a\mathfrak{C}+(T+dT)\mathfrak{C}\gamma+(T+2dT+ddT)\gamma d$. At differentialia dT et ddT in vtroque membro non ſunt aequalia, ſed differunt pro punctis $\mathfrak{C}$ et γ. Ponantur autem primo aequalia erit reſiduum ſi illud membrum ab hoc ſubtraha-

trahatur $-b\beta.d.\mathrm{T}q+c\gamma d(\mathrm{T}+d\mathrm{T})(q+dq)$; posito q loco $\frac{dy}{ds}$. Ponantur iam $a\beta$, $\beta\gamma$ et γd in aequalia ipsis ab, bc, et cd, et quaeratur differentia, quae ex varia significatione $d\mathrm{T}$ et $dd\mathrm{T}$ oritur. Est vero ipsius $\mathrm{L}\,ds$, transitu facto ab elementis ab, bc, cd ad elementa $a\beta$, $\beta\gamma$, γd, incrementum $\mathrm{L}.\beta m=\mathrm{L}q.b\beta$, ipsius $\mathrm{M}\,dy$ vero $\mathrm{M}b\beta.\mathrm{N}\,dx$ non mutatur. Simili modo ipsius $2\mathrm{L}\,ds+d.\mathrm{L}\,ds$ incrementum est $(\mathrm{L}+d\mathrm{L})(\beta m-b\mu-c\gamma)=(\mathrm{L}+d\mathrm{L})(-dq.b\beta-(q+dq)c\gamma)$, et ipsius $2\mathrm{M}\,dy+d.\mathrm{M}\,dy$ incrementum est $-(\mathrm{M}+d\mathrm{M})c\gamma$. His singulis incrementis per bc et cd respective multiplicatis, cum ante inuento residuo in vnam summam coniectis, et $=o$ positis, prodibit ista aequatio $b\beta(-\mathrm{d}.\mathrm{T}q+\mathrm{L}q\,ds+\mathrm{M}\,ds-\mathrm{L}\,ds\,dq)+c\gamma(\mathrm{d}.(\mathrm{T}+d\mathrm{T})(q+dq)-\mathrm{L}q\,ds-\mathrm{L}q\,dds-q\,d\mathrm{L}\,ds-\mathrm{M}\,ds-\mathrm{M}\,dds-d\mathrm{M}\,ds)=o$. Assumo hic autem bc pro ds, et cd pro $ds+dds$, quia ab non occurrit. Si haec aequatio cum $\mathrm{P}b\beta-(\mathrm{P}+d\mathrm{P})c\gamma=o$ conferatur, reperietur $\mathrm{P}=c^{\int\frac{\mathrm{L}ds^2dq}{\mathrm{M}dx^2-\mathrm{N}dxdy-\mathrm{T}dsdq}}\left(\frac{\mathrm{M}dx^2-\mathrm{N}dxdy-\mathrm{T}dsdq}{ds}\right)$, vbi c significat numerum, cuius logarithmus est 1. Similiter, si formula proposita fuerit $\int\mathrm{T}\,dy$, reperietur $\mathrm{P}=c^{-\int\frac{\mathrm{L}dsdydq}{\mathrm{L}dx^2+\mathrm{N}dxds}}\left(\frac{\mathrm{L}dx^2+\mathrm{N}dxds}{ds}\right)$. Hic si fuerit $\mathrm{N}=0$ erit $\mathrm{P}=\frac{\mathrm{L}dx^2}{ds^2}$.

§. 24. Considerabimus adhuc hanc vnicam formulam $\int\mathrm{X}\,ds^m dy^n dx^{1-m-n}$, in qua X functionem tantum ipsius x denotat. Neglecto igitur dx vt constante, erit $\mathrm{X}.ab^m.b\mathrm{M}^n+(\mathrm{X}+d\mathrm{X}).bc^m.c\mathrm{N}^n+(\mathrm{X}+$

$2dX+ddX)cd^m.dP^n=X.a\mathfrak{E}^m.\mathfrak{E}M^n+(X+dX)\mathfrak{E}\gamma^m(cN-b\mathfrak{E}-c\gamma)^n+(X+2dX+ddX)\gamma d^m(dP+c\gamma)^n$. Cuius aequationis illa parte ab hac ſubtracta reſtabit $-b\mathfrak{E}$ d. $X(mab^{m-2}.bM^{n+1}+n.ab^m.bM^{n-1})+c\gamma d.(X+dX)(m.bc^{m-2}.cN^{n+1}+n.bc^m.cN^{n-1})=0$. Quae aequatio cum iam habeat formam huius $P.b\mathfrak{E}-(P+dP)c\gamma=0$, erit $P=-d.X(mds^{m-2}dy^{n+1}+n.ds^m dy^{n-1})=-d.Xds^{m-2}dy^{n-1}(mdy^2+nds^2)$. Simili modo ſi propoſita fuiſſet haec formula $\int T ds^m dy^n dx^{1-m-n}$, in qua T fuerit functio quaecunque ipſarum x et y, ita vt ſit $dT=Mdy+Ndx$, proditura fuiſſet haec aequatio $P=Mds^m dy^n-d.Tds^{m-2}dy^{n-1}(mdy^2+nds^2)$. Atque generaliſſime, ſi in $\int T ds^m dy^n dx^{1-m-n}$ fuerit T functio quaecunque ipſarum xy et s, atque propterea $dT=Ldx+Mdy+Ndx$ erit $P=c^{\int \frac{Lds^m dy^n dq}{Mds^m dy^n+Lqds^m dy^n-d.Tds^{m-2}dy^{n-1}(mdy^2+nds^2)}}(Mds^m dy^n+Lqds^m dy^n-d.Tds^{m-2}dy^{n-1}(mdy^2+nds^2)$ Haecque eſt formula generaliſſima omnes priores in ſe complectens.

§. 25. Hae formulae inuentae ſeu valores ipſius P reſpondentes omnibus, quae proponi poſſunt proprietatibus, vnum tantum ſignum ſummatorium inuoluentibus, quo clarius in conſpectum cadant, atque facilius ad caſus quosuis poſſint accommodari, collegi eas, et in ſequentem tabulam diſpoſui.

Pro-

Proprietates propoſitae. ($q=\frac{dy}{ds}$, et $ddx=0$)	*Valores litterae* P *reſpondentes.*
I. $\int T\,dx$, $dT=M\,dy$	$P=M\,dx$.
II. $\int T\,dy$, $dT=N\,dx$	$P=N\,dx$.
III. $\int T\,ds$, $dT=N dx$	$P=\mathrm{d}.Tq$.
IV. $\int T\,ds$, $dT=M\,dy$	$P=\mathrm{d}.Tq-M\,ds$
V. $\int T\,dx$, $dT=M dy+N dx$	$P=M\,dx$
VI. $\int T\,dy$, $dT=M dy+N dx$	$P=N\,dx$.
VII. $\int T\,ds$, $dT=M dy+N dx$	$P=\mathrm{d}.Tq-M\,ds$
VIII. $\int T\,dx$, $dT=L ds+N dx$	$P=Lq^2$.
IX. $\int T\,dy$, $dT=L ds+M dy$	$P=L\,dx^2:ds^2$
X. $\int T dx$, $dT=L ds+M dy+N dx$.	$P=c^{\frac{\int L dq}{Lq+M}}(Lq+M)$
XI. $\int T dy$, $dT=L ds+M dy+N dx$,	$P=c^{-\int\frac{L ds dy dq}{L dx^2+N dx ds}}\left(\frac{L dx+N ds}{ds}\right)$
XII. $\int T ds$, $dT=L ds+M dy+N dx$,	$P=c^{\int\frac{L ds^2 dq}{M dx^2-N dx dy-T ds dq}}\left(\frac{M dx^2-N dx dy-T ds dq}{ds}\right)$
XIII. $\int\frac{T\,ds^m dy^n}{dx^{m+n-1}}dT=N\,dx$	$P=\mathrm{d}.Tds^{m-2}dy^{n-1}(m dy^2+n ds^2)$
XIV. $\int\frac{T\,ds^m dy^n}{dx^{m+n-1}}dT=M dy+N dx$,	$P=\mathrm{d}.Tds^{m-2}dy^{n-1}(m dy^2+n ds^2)-M ds^m dy^n$
XV. $\int\frac{T\,ds^m dy^n}{dx^{m+n-1}}$, $dT=L ds+M dy+N dx$,	$P=c\int\frac{L\,ds^m dy^n dq}{(Lq+M)ds^m dy^n-\mathrm{d}.Tds^{m-2}dy^{n-1}(m dy^2+n ds^2)}$ $(Lq+M)ds^m dy^n-$ $\mathrm{d}.Tds^{m-2}dy^{n-1}(m dy^2+n ds^2))$.

§. 26. Ope huius tabulae nunc perfacile erit problemata tum primae tum ſecundae claſſis reſoluere. Quod quidem ad primam attinet, in qua quaeritur curua, quae

omnium maximum vel minimum habeat valorem proprietatis propositae A; ad hanc inueniendam sequens habetur regula: Quaeratur proprietates A in tabula, et functione T ad eam accomodata, accipiatur valor ipsius P respondens, isque ponatur $= o$, quae aequatio erit pro curua quaesita. Vt si quaerenda sit curua brachystochrona debebit tempus descensus, quod per $\int \frac{ds}{\sqrt{x}}$ exprimitur, esse minimum. Continetur autem haec formula in tertia, sitque $T = \frac{1}{\sqrt{x}}$ cui respondet $P = d.\frac{q}{\sqrt{x}}$, qui valor cum debeat esse $= o$ erit $\frac{q}{\sqrt{x}} =$ const. seu $dy\sqrt{a} = ds\sqrt{x}$, et $a\,ds^2 - a\,dx^2 = x\,ds^2$. Fit igitur $ds = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{a-x}}$ et $s = C - 2\sqrt{a(a-x)}$, ex qua intelligitur, curuam quaesitam esse cycloidem. Ad inueniendam curuam oa quae circa axem Oo ipsi oA normalem rotata, generat solidum, quod in fluido secundum huius axis directionem motum patiatur minimam resistentiam debebit $\int \frac{x dx^3}{ds^2}$ esse minimum, continetur hoc in formula XIII, vbi esse debet $T = x, m = -2, n = o$, Hinc fit $P = d. - \frac{2x dy}{ds^4} = o$. Ergo $x\,dx^3\,dy = a\,ds^4$, ex qua curua generans solidum minimae resistentiae determinatur.

§. 27. Ad secundae classis problemata soluenda sequens inseruiet regula. Si ex omnibus curuis proprietate A aequaliter praeditis ea debeat inueniri, quae proprietatem B maximo minimoue gradu contineat; quaerantur proprietates A et B in tabula et sumantur valores ipsius P respondentes, eorumque per quasuis quantitates constantes multiplicatorum summa ponatur aequalis nihilo; quo facto aequatio proueniens exprimet natu-

naturam curuae quaeſitae. Hanc regulam nonnullis exemplis illuſtrare iuuabit. Quaeratur curua oa, quae inter omnes eiusdem longitudinis maximam comprehendat aream; erit $A = s = \int ds$. et $B = \int y\,dx$. Illi autem ex formula III. reſpondet $P = dq$. huicque ex prima $P = dx$. Quamobrem haec aequatio $a\,dq = dx$ erit pro curua quaeſita. Ex illa vero prodit haec $aq = \frac{a\,dy}{ds} = x$ ſeu $dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ i. e. $y^2 + x^2 = a^2$. Quae eſt aequatio ad circulum. Requiratur nunc curua oa, quae inter omnes alias eiusdem longitudinis, ſi circa axem Oo conuertatur, producat maximum ſolidum. Erit ergo $A = \int ds$ et $B = \int x^2\,dy$: quare pro A erit $P = dq$, et pro B erit $P = 2x\,dx$. Ex quibus iuxta regulam, ſit $a^2\,dq = 2x\,dx$. Quae integrata dat $a^2\,dy = x^2 ds + b^2 ds$, qua natura curuae elaſticae exprimitur. Inuenienda ſit porro curua oa, quae circum axem Oo rotata inter omnes alias aequalia ſolida producentes generet minimam ſuperficiem, Erit ergo $A = \int x\,x\,dy$ et $B = \int x\,ds$. Illi igitur ex Tabula respondet $P = 2x\,dx$, huic vero $P = d.xq$. Hinc naſcitur aequatio $2x\,dx = a\,d.xq$ ſeu $x^2 + b^2 = \frac{axdy}{ds}$. Quae reducitur ad hanc $dy = \frac{(x^2+b^2)\,dx}{\sqrt{(a^2x^2-(x^2+b^2)^2)}}$. Haec eſt ad circulum ſi $b = o$, et ad catenariam ſi fiat a infinitum, et $bb = ae$. Quaeratur etiam curua oa, quae inter omnes eiusdem longitudinis habeat centrum ſuum grauitatis ab axe Oo maxime remotum. Erit ergo $A = \int ds$ et $B = \frac{\int x ds}{s}$. Quia autem s in omnibus curuis ponitur eiusdem quantitatis, poterit pro B accipi $\int x\,ds$. Sit igitur pro A, $P = dq$ et pro B, $P = d.xq$. Vnde haec oritur aequatio $a\,dq = d.xq$, ſeu $aq = xq - b$.

Scri-

Scribatur x loco $x-a$, habebitur $xq=b$ seu $x\,dy=b\,ds$, quae est aequatio pro catenaria.

§. 28. Hic non possum, quin annotem, nisi s fuisset in omnibus curuis eiusdem longitudinis et propterea in B reiici potuisset, problema ex formulis resolui non potuisse, quia huiusmodi forma $\frac{\int x\,ds}{s}$ in iis non reperitur. Potest quidem ad propiorem reduci sumendo differentiali iterumque praeponendo signo summatorio, vt tota quantitas signum $\int$ habeat praefixum, fitque hoc modo $B=\int\frac{ds\int s\,dx}{s^2}$: Verum quia haec quantitas $\frac{\int s\,dx}{s^2}$ in T, quippe quae littera semper quantitatem integratam denotat, non comprehenditur, nihil iuuat ad hoc tabula. Nam quoniam in T non inesse possunt differentialia, facile intelligitur neque integralia inesse posse. Hanc ob rem pro huiusmodi casibus formulae erunt etiam eruendae. Inueni autem, si haec $\int(s^n\int s\,dx)\,ds$ fuerit proposita, fore $P=c^{\int\frac{sq\,ds\,dx-n\,ds\,dq\int s\,dx}{s^2q\,dx+s\,dq\int dx}}(s^{n+1}q\,dx+s^n\,dq\int s\,dx)$. Quae in casu proposito, quo est $n=-2$, dat $P=c^{\int\frac{sq\,ds\,dx+2\,ds\,dq\int s\,dx}{s^2q\,dx+s\,dq\int s\,dx}}(\frac{sq\,dx+dq\int s\,dx}{s^2})$. Haec ad problema postremum soluendum debet aequalis poni $a\,dq$. Sumtis igitur logarithmis tumque differentialibus, prodibit $\frac{ddq}{dq}=\frac{sq\,ds\,dx+2\,ds\,dq\int s\,dx}{s^2q\,dx+s\,dq\int s\,dx}+\frac{2\,ds\,dq\,dx+q\,ds\,dx+dd\,q\int s\,dx}{sq\,dx+dq\int s\,dx}-\frac{2\,ds}{s}$. Quae abit in hanc $\frac{ss\,q\,dx\,ddy}{dq}=2\,s\,s\,dq\,dx$, haecque per $s\,s\,dx$ diuisa in $q\,ddq=2\,dq^2$. Integrando ex hac oritur $qq\,dx=-a\,dq$, atque iterum $x=\frac{a}{q}=\frac{a\,ds}{dy}$, seu $x\,dy=a\,ds$, quae est pro catenaria vt ante.

§. 29. Quo autem generaliores huiusmodi formulas consequamur, sit haec proposita $\int T\,dx\int V\,dx$. In qua

qua T et V denotant functiones quascunque ipsarum x y et s, ita vt sit $dT = L\,ds + M\,dy + N\,dx$ et $dV = G\,ds + H\,dy + K\,dx$. Ex hac formula inuenitur $P = c^{\int \frac{Ldq\int V dx - TGq\,dx - TH\,dx}{(Lq+M)\int V dx}} (Lq+M)\int V\,dx$. Sit nunc haec formula proposita $\int T\,dx \int V\,dy$ in qua T et V praecedentes habent valores, erit $P = c^{\int \frac{Ldq\int V dy + T\,dV - TGq\,dy - TH\,dy}{(Lq+M)\int V dy + TV}}$ $(TV + (Lq+M)\int V\,dy)$. Atque pro hac formula $\int T\,dx \int V\,ds$ reperitur $P = c^{\int \frac{Ldq\int V ds + Tq\,dV - TGq\,ds - TH\,ds}{(Lq+M)\int V ds + TVq}}$ $(TVq + (Lq+M)\int V\,ds)$. Huiusmodi tres inueniuntur etiam, si sumatur $T\,dy$ vel $T\,ds$ loco $T\,dx$. Has autem omnes prout eas inueni, tanquam tabulae continuationem adiicio.

Proprietates propoſitae. *Valores litterae* P *reſpondentes.*

XVI. $\int T dx \int V dx$, $P = c^{\int \frac{Ldq(V dx - TG q dx - TH dx}{(Lq+M)\int V dx}} (Lq+M)\int V dx$

XVII. $\int T dx \int V dy$, $P = c^{\int \frac{Ldq\int V dy + TdV - TGq dy - TH dy}{(Lq+M)\int V dy + TV}} (TV + (Lq+M)\int V dy)$

XVIII. $\int T dx \int V ds$, $P = c^{\int \frac{Ldq\int V ds + TqdV - TGqds - THds}{(Lq+H)\int V ds + TVq}} (TVq + (Lq+M)\int V ds)$

XIX. $\int T dy \int V dx$, $P = c^{\int \frac{Ldqdy\int V dx - TGqdxdy - THdxdy}{(Lqdy+Mdy)Vdx - dT\int V dx - TV dx}} ((Lqdy+Mdy)\int V dx - d.T\int V dx)$

XX. $\int T dy \int V dy$, $P = c^{\int \frac{Ldydq\int V dy + TdVdy - TGqdy^2 - THdy^2}{(Lqdy+Mdy)\int V dy + TVdy - dT\int V dy - VTdy}} (Lqdy+M dy)\int V dy + TV dy - d.T\int V dy)$

XXI. $\int T dy \int V ds$, $P = c^{\int \frac{Ldydq\int V ds + TqdVdy - TGqdsdy - THdsdy}{(Lqdy+Mdy)\int V ds + TVqdy - d.T\int V ds}} ((Lqdy+M dy)\int V ds + TVqdy - d.T\int V ds)$

XXII. $\int T ds \int V dx$, $P = c^{\int \frac{Ldsdq\int V dx - TGdsdx - THdsdx}{(Lqds+Mds)\int V dx - d.Tq\int V dx}} ((Lqds+Mds)\int V dx - d.T q\int V dx)$

XXIII. $\int T ds \int V dy$, $P = c^{\int \frac{Ldsdq\int V dy + TdVds - TGqdsdy - THdsdy}{(Lqds+Mds)\int V dy + TVds - d.Tq\int V dy}} (Lqds+Mds\int V dy + TV ds - d.T q\int V dy)$

XXIV. $\int T ds \int V ds$, $P = c^{\int \frac{Ldsdq\int V ds + TqdVds - TGqds^2 - THds^2}{(Lqds+Mds)\int V ds + TVqds - d.Tq\int V ds}} ((Lqds+Mds)\int V ds + TV qds - d.T q\int V ds)$

Eſtque vbique $dT = L ds + M dy + N dx$, et $dV = G ds + H dy + K dx$.

§. 30. Quo vſus harum formularum melius intelligatur, quaeri oporteat inter omnes curuas, quas catena cuiuscunque craſſitiei formare poteſt, eam quae habeat centrum grauitatis ſuum a recta Oo remotiſſimum. Patet hic alteram conditionem omnes curuas eius-

eiusdem ponere longitudinis, ex qua oritur $P = dq$; alteram respicere distantiam centri grauitatis a recta Oo, quae hac formula exprimitur, $\frac{\int x dS}{S}$, vbi S pondus catenae oa repraesentat. Haec vero vt ad formam in tabula contentam reducatur, differentietur, et prodibit $\frac{Sxds - dS\int x ds}{SS}$ vel ponendo $\int S dx + \int x dS$ loco Sx, hoc $\frac{ds\int S dx}{SS}$. Quare huius integrale $\int \frac{ds\int S dx}{SS}$ erit $= \frac{\int x dS}{S}$. Sit $dS = t ds$, est enim S functio ipsius s, erit hac expressione cum vigesima secunda comparata $T = \frac{t}{SS}$ et $V = S$. Atque $L = \frac{S\sigma - 2tt}{S^3}$ posito $dt = \sigma ds$, $G = t$, et $M = N = H = K = o$. Ex quibus prodit $P = e^{\int \frac{(2tt - S\sigma) ds dq \int S dx + St^2 q ds dx}{S^2 tq dx + Stdq\int S dx}} \left(\frac{Stqdx + tdq\int S dx}{SS}\right)$, quod ergo aequale debet poni adq. Sumantur logarithmi et deinde differentialia, prodibit $2SSt dq dx + SS\sigma q ds dx = \frac{SStqdxddq}{dq}$, quae per $SSt q dx$ diuisa et integrata dat $qq\, t dx = a dq$; quae pro q substituto $\frac{dy}{ds}$, et $\frac{dS}{ds}$ pro t, iterum potest integrari, proditque $S dy = a dx$. Haecque exprimit naturam catenariae, cuius pondus se habet ad longitudinem vt S ad s. Potuisset quidem eadem aequatio multo facilius inueniri, si in $\frac{\int x dS}{S}$ neglexissem denominatorem, quippe qui per priorem conditionem debet in omnibus curuis esse idem. Verum quia hoc fortuito accidit, malui vti methodo directa, praesertim cum constituissem vsum harum formularum ostendere.

§. 31. His de prima et secunda classe expositis multo erit facilius tertiam sequentesque aggredi. Atque a tertia incipiendo, vt iam vidimus, omnia ad eam

pertinentia problemata in hoc vniuerſali comprehenduntur, vt quaeratur curua, quae inter omnes et proprietate A et proprietate B ſimul aequaliter praeditas contineat proprietatem C maximo, minimoue gradu. Ad huiusmodi problemata ſoluenda neceſſe eſt quatuor curuae inueniendae elementa conſiderare. Hanc ob rem figuram quartam ita inſtitui, vt quatuor elementa, ab, bc, cd, et de exhibeantur, quae vt in praecedentibus figuris ad aequalia axis OA elementa AB, BC, CD et DE referuntur. Totidem igitur erunt etiam applicatarum elementa bM, cN, dP et eQ conſideranda. Maneant, vt ante $oa = s$, $OA = x$ et $Aa = y$, erunt $AB = BC = CD = DE = dx$, $bM = dy$, $cN = dy + ddy$, $dP = dy + 2ddy + d^3y$ et $eQ = dy + 3ddy + 3d^3y + d^4y$; itemque $ab = ds$, $bc = ds + dds$, $cd = ds + 2dds + d^3s$, et $de = ds + 3dds + 3d^3s + d^4s$. Fig. 4.

§. 32. Ducantur deinde etiam curuae proximae per terminos a et e tranſeuntis elementa ad eadem axis OA elementa relata $a\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$ et $\delta\varepsilon$. Debebunt ergo quoque ob rationem ante allatam ſingulae tres propoſitae proprietates in has duas elementorum quaterniones aequaliter competere. Quamobrem proprietatum propoſitarum quaelibet et pro elementis ab, bc, cd, de formula exprimatur, et pro elementis $a\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\varepsilon$; tumque illa ab hac ſubtrahatur, et reſiduum ponatur $= o$. Huiusmodi ergo tres in quouis caſu prodibunt aequationes, quae omnes talem habebunt formam $P.b\beta - Q.c\gamma + R.d\delta = o$, Etenim ſingula tam applicatarum, quam arcuum incrementa vel decrementa poſſunt

poſſunt, vt ante eſt factum, ad haec $b\beta, c\gamma$, et $d\delta$ reduci. Atque P, Q et R prorſus in x, y et x abeuntur, neque ab hoc aſſumto ſitu proximo pendebunt. Quare cum huiusmodi aequationes $P.b\beta - Q.c\gamma + R.d\delta = o$ tres obtineantur, poterunt particulae $b\beta, c\gamma$ et $d\delta$ eliminari; quo facto reſultabit aequatio ab illis liberata, haecque determinabit naturam curuae quaeſitae oa.

§. 33. Saepe et potiſſimum in caſibus ſimplicioribus accidit, vt ſit $Q = P + dP$, et $R = P + 2dP + ddP$. Atque ad huiusmodi formam conuenit aequationem, quoties aliam habuerit, reducere, ſi fieri poteſt, vel multiplicanda vel dividenda ea. Si autem ex omnibus tribus proprietatibus propoſitis ad tales aequationes peruentum fuerit, facile erit ex iis aequationem pro curua quaeſita formare: hoc enim tantum opus eſt, vt quantitatum in ſingulis pro P prodeuntium ſumantur quaecunque multipla, eorumque ſumma ponatur $= o$. Nam ſi tres habeantur huiusmodi aequationes $P.b\mathfrak{G} - (P + dP)c\gamma + (P + 2dP + ddP)d\delta = o$, $p.b\mathfrak{G} - (p + dp)c\gamma + (p + 2dp + ddp)d\delta = o$, et $\pi.b\mathfrak{G} - (\pi + d\pi)c\gamma + (\pi + 2d\pi + dd\pi)d\delta = o$, prodibit eliminatis $b\mathfrak{G}, c\gamma$ et $d\delta$, haec aequatio $pd\pi ddP - \pi dpddP + \pi dPddp - Pd\pi ddp + Pdpdd\pi - pdPdd\pi = o$. Ex qua integrata reperitur $P + mp + n\pi = o$, in qua m et n quantitates quascunque conſtantes deſignant. Patet ergo veritas regulae datae.

§. 34. Propoſita ſit pro quapiam proprietate haec quantitas $\int y^n dx$. Erit ob dx conſtans $Aa^n + Bb^n +$

$C c^n + D d^n = A \alpha^n + B \beta^n + C \gamma^n + D \delta^n$, cuius aequationis, si illud membrum ab hoc subtrahatur, remanebit $n.B b^{n-1}.b\beta - n.C c^{n-1} c\gamma + n.D d^{n-1}.d\delta = o$. Quae cum iam habeat formam praescriptam erit $P = n B b^{n-1} = n y^{n-1}$. Perspicitur porro si assumta fuisset $\int Y dx$, vbi Y denotat functionem quamcunque ipsius y, proditurum fuisse $P = dY : dy$. Quamobrem formula prima in tabula superiore etiam pro classe hac tertia valebit. Si sit proposita haec formula $\int x^n dy$, erit $OA^n b M + OB^n . c N + OC^n . dP + OD^n . eQ = OA^n (bM + b\beta) + OB^n (cN - b\beta - c\gamma) + OC^n (dP + c\gamma + d\delta) + OD^n (eQ - d\delta)$. Hinc fit $b\beta (OA^n - OB^n) - c\gamma (OB^n - OC^n) + d\delta (OC^n - OD^n) = o$, quae cum habeat formam praescriptam, apparet esse $P = -nx^n dx$, atque simul intelligitur formulam secundam tabulae in hac tertia classe etiam locum habere. Generatim vero videre licet, si in praescripta formula $\int T dx$, $\int T dy$, $\int T ds$, T ab s non pendeat, statim ad aequationem requisitam formam habentem perueniri, atque P eundem retinere valorem, quem habet in tabula praecedente. Valent ergo in tertia classe etiam formulae I, II, III, IV, V, VI, VII, imo quoque XIII, et XIV. Atque non solum in tertia sed etiam omnibus sequentibus classibus subsistunt.

§. 35. Cum itaque dictae formulae in omnibus classibus vsurpari possint, in promtu erit problema cuiuscunque classis propositum resoluere, si modo proprietates, quae in illo occurrunt, in istis tabulae formulis contineantur. Tum vero sequens regula, quae priori

priori ſimilis eſt, debet adhiberi; pro ſingulis ſcilicet proprietatibus, quae in problemate afferuntur quaerendi ſunt valores litterae P ex tabula, eorumque tum ſumantur multipla quaecunque et horum ſumma fiat aequalis nihilo; quo facto aequatio proueniens exponet naturam curuae quaeſitae. Vt ſi inuenienda eſſet curua, quae inter omnes, quae ſunt eiusdem longitudinis, et eandem comprehendunt aream, et circum axem Oo conuerſae generant ſolida aequalia, producat circa hunc eundem axem rotata ſolidum minimae ſuperficiei. Occurrunt hic quatuor proprietates, quae omnes in deſignatis formulis continentur. Ex prima, quae dat formulam $\int ds$, ſit $P = dq$ ex ſecunda, quae dat $\int y\,dx$ fit $P = dx$, ex tertia contenta formula $\int x\,x\,dy$, fit $P = x\,dx$, et ex quarta contenta formula $\int x\,ds$ ſit $P = d.\,xq$. Quocirca aequatio pro curua quaeſita erit $a\,dq + b\,dx + 2\,c\,x\,dx + d.\,xq = o$, ſeu haec $aq + bx + cx^2 + xq = f$, hoc eſt $a\,dy + b\,x\,ds + c\,x^2\,ds + x\,dy = f\,ds$, quae innumerabiles curuas in ſe comprehendit.

§. 36. Antequam autem eas formulas pro tertia claſſe contemplor, in quibus T etiam ab s pendet, afferam quaedam exempla ad quae ſoluenda memoratae formulae ſufficiunt. Sit igitur propoſitum curuam inuenire, quae inter omnes eiusdem longitudinis et eandem aream comprehendentes generet circa axem Oo conuerſa maximum ſolidum. Tres proprietates quae hic occurrunt, ſunt $\int ds$, $\int y\,dx$ et $\int x^2\,dy$, quibus reſpondent hi ipſius P valores dq, dx et $x\,dx$. Ergo curua quaeſita hanc habebit aequationem $a\,dq + b\,dx + 2\,x\,dx$

$+2xdx=o$ seu $aq+bx+xx=c$, i. e. $ady+bxds+xxds=cds$. Quaeratur nunc inter omnes iterum curuas eiusdem longitudinis et eiusdem areae curua, super qua graue descendat celerrime seu tempore breuissimo. Hic pro prioribus duabus proprietatibus habet P hos valores dq et dx, pro tertia autem, cuius haec est formula $\int\frac{ds}{\sqrt{x}}$, hunc d. $\frac{q}{\sqrt{x}}$. Habebitur ergo pro curua quaesita haec aequatio, $adq+dx+b$ d. $\frac{q}{\sqrt{x}}=o$ seu $aq+x+\frac{bq}{\sqrt{x}}=c$, i. e. $ady+xds+\frac{bdy}{\sqrt{x}}=cds$. Inuenienda sit etiam curua, quae inter omnes eiusdem areae, et circa axem Oo rotatas aequalia solida generantes, producat circa eundem axem conuersa solidum, quod in fluido secundum huius axis directionem motum minimam patiatur resistentiam. Priores duae conditiones dant pro P hos valores dx et xdx, posterior vero, cuius formula est $\int\frac{xdx^3}{ds^2}$ hunc d. $\frac{xdy}{ds^2}$. Erit ergo in curua quaesita $adx+2bxdx+$ d. $\frac{xdx^3dy}{ds^4}=o$, seu $ax+bxx+\frac{xdx^3dy}{ds^4}=c$. Quae si ponatur $c=o$, et x augeatur constante quadam vel minuatur, abit in hanc $xds^4=adx^3dy$, quae aequatio est pro curua algebraica, dat enim integrata hanc aequationem quarti ordinis $y^4-2by^3+2x^2y^2-18bx^2y+x^4+27b^2x^2=o$ vel $y^4+6by^3+2x^2y^2+12b^2y^2-10bx^2y+8b^3y-b^2x^2+x^4=o$. Haec etiam prodiisset si a et c fuissent positae $=o$. Ex quo sequitur hanc aequationem dare curuam minimae resistentiae solidum generantem, inter omnes curuas eiusdem capacitatis solida producentes.

§. 37.

§. 37. Quanquam autem huiusmodi problemata, quoties formula occurrit, quae in tabula ad talem referenda est, in qua T etiam in s determinatur, iuxta datam regulam resolui nequeunt; quia non habetur valor ipsius P pro hac tertia classe: tamen saepe fieri potest, vt nihilominus facile sit solutionem perficere. Ex collatione enim formularum datas proprietates exhibentium saepe eae in alias possunt transmutari, quae in definitis formulis contineantur. Vt si oporteat inter omnes curuas eiusdem longitudinis et eiusdem areae eam determinare, in qua $\int s\,dx$ sit maximum vel minimum. Pertinet haec formula $\int s\,dx$ ad octauam, qua vti in tertia et sequentibus classibus non licet. Verum quia $\int s\,dx = sx - \int x\,ds$, atque per primam proprietatem praescriptam s in omnibus curuis debet esse eiusdem longitudinis, habebit sx valorem constantem, adeoque $\int x\,ds$ debebit quoque esse minimum vel maximum. Hanc ob rem pro hoc problemate hae tres formulae poterunt recipi $\int ds$, $\int y\,dx$ et $\int x\,ds$, ex hisque solutio inueniri. Habebit enim P tres hos valores dq, dx et d. xq, ex quibus pro curua quaesita sequens obtinetur aequatio $aq + bx + xq = c$ seu $a\,dy + b\,x\,ds + x\,dy = c\,ds$. Quae, nisi hoc compendio vsi essemus, difficillime eruta fuisset. Quando vero huiusmodi reductiones locum habeant, facilius est quouis casu oblato perspicere, quam per regulam definire.

§. 38. Consideremus tamen huiusmodi formulas, in quibus etiam s in T ingreditur; sitque propositum vt $\int s^n dx$ in vtroque elementorum quaternione sit idem. Erit ergo ob dx constans $o\,a^n + o\,b^n + o\,c^n + o\,d^n = o\,a^n + o$

$+o\beta^n+o\gamma^n+o\delta^n$. Eſt vero $o\beta^n-ob^n=nob^{n-1}q.b\beta$, $o\gamma^n-oc^n=noc^{n-1}(-dq.b\beta-(q+dq)c\gamma)$ et $o\delta^n-od^n=nod^{n-1}(-dq.b\beta+(dq+ddq)c\gamma+(q+2dq+ddq)d\delta)$. Fit igitur $b\beta(ob^{n-1}.q-oc^{n-1}.dq-od^{n-1}.dq)-c\gamma(oc^{n-1}.(q+dq)-od^{n-1}(dq+ddq)+d\delta(od^{n-1}(q+2dq+ddq)=o$. Et generatim ſi aſſumta fuiſſet haec formula $\int T dx$ ſignificetque T functionem quamcunque ipſius s, ita vt ſit $T=L ds$, proditura fuiſſet aequatio iſta $b\beta(Lq-(2L+2dL+ddL)dq)-c\gamma(Lq+qdL-dLdq-Lddq-2dLddq-dqddL-ddLddq)+d\delta(L+2dL+ddL)(q+2dq+ddq)=o$. Hae vero aequationes nullo modo ad talem formam $b\beta.P-c\gamma(P+dP)+d\delta(P+2dP+ddP)=o$ reduci poſſunt. Quamobrem eae aliter adhiberi non poterunt, niſi vt cum duabus reliquis aequationibus, quas alterae conditiones ſuppeditant, coniungatur, et re ipſa elementa $b\beta$, $c\gamma$, et $d\delta$ eliminentur. Habeant autem reliquae duae aequationes talem formam, et ſint $b\beta.p-c\gamma(p+dp)+d\delta(p+2dp+ddp)=o$ et $b\beta.r-c\gamma(r+dr)+d\delta(r+2dr+ddr)=o$. Illa vero aequatio ſit breuitatis gratia $b\beta.A-\gamma.B+d\delta.C=o$. Ex iis ſi eliminentur $b\beta$, $c\gamma$ et $d\delta$ prodibit iſta aequatio $A(pdr-rdp+pddr-rddp+dpddr-drddp)-B(2pdr-2rdp+pddr-rddp)+C(pdr-rdp)=o$, vel ſi ponatur $r=pt$ haec $A(ppdt+ppddt+2pdpdt+pdpddt-pdtddp+2dp^2dt)-B(2ppdt+ppddt+2pdpdt)+Cppdt=o$. Quae determinabit naturam curuae quaeſitae. Poterunt autem loco aequationis $b\beta.A-c\gamma.B+d\delta.C=o$, omnes aequationes, quae ex quibuscunque

cunque formulis oriuntur, substitui. Atque hoc modo omnia tertiae classis problemata soluentur, in quibus duae saltem conditiones ad formulas in hac classe locum habentes deducunt.

§. 39. In nostro quidem casu, si problema fuerit propositum, vt inter omnes curuas proprietates A et B habentes ea inueniatur, in qua $\int T dx$ (vbi $dT = L ds$) sit maximum minimumue, atque proprietates A et B ad has aequationes $b\beta.p - c\gamma(p+dp) + d\delta.(p+2dp+ddp) = o$ et $b\beta.r - c\gamma(r+dr) + d\delta(r+2dr+ddr) = o$ reducantur; reperietur pro curua quaesita sequens aequatio, $3Lpdrddq - 3Lrdpddq + pqdrddL - rqdpddL + 2Lrdqddp - Lqdrddp + rqdLddp - 2Lpdqddr + Lqdpddr - pqdLddr + 4pdLdrdq - 4rdLdpdq = o$, quae facta substitutione $r = pt$ in hanc abit $Lpqdpddt - 2Lppdqddt - ppqdLddt + 3Lppdtddq + ppqdtddL - Lpqdtddp + 2Lqdp^2dt - 4Lpdpdqdt + 4ppdLdqdt - 2pqdLdpdt = o$. Si altera conditio ponat areas aequales, ita vt sit $p = dx$ et dp et $ddp = o$ prodibit ista aequatio $\frac{ddr}{dr} = \frac{3Lddq + qddL + 4dLdq}{2Ldq + qdL}$. Si praeterea fuerit $T = s$, erit $L = 1$ et dL et $ddL = o$. Quocirca habebitur pro curua quaesita ista aequatio $\frac{2ddr}{dr} = \frac{3ddq}{dq}$, et integrando $dxdr^2 = adq^3$. Si tertia conditio requirat omnes curuas eiusdem longitudinis erit $r = dq$, proueniet igitur haec aequatio $addq^2 = dq^3 dx$ vel $\frac{addq}{\sqrt{dq}} = dq\sqrt{dx}$, quae integrata dat $a\sqrt{dq} = q\sqrt{dx} + b\sqrt{dx}$, seu $\frac{adq}{(b+q)^2} = dx$ atque $x = \frac{a}{b+q} + c = \frac{c+cq}{b+q}$. Quae est eadem, quam pro eodem casu in §. 37. inuenimus.

DE LVNVLIS QVADRABILIBVS, E VARIARVM CVRVARVM COMBINATIONE ORTIS.

AVCTORE

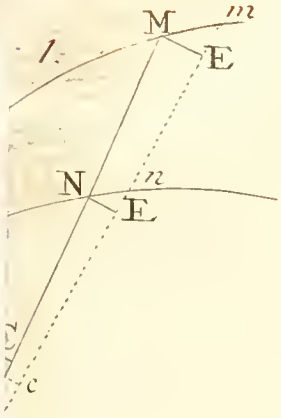
Georgio Wolffg. Krafft.

§. 1.

Tabula IX.

LVnulam in genere vocamus Figuram, duobus arcubus quarumuis curuarum terminatam; occasione sumtâ à Lunula Hippocratis Chii, quae generatur ab intersectione duorum arcuum circularium, quam solam ab antiquis deriuatam ad nos tenemus. Quamuis autem recentiori aetate multa praeclara circa hanc materiam fuerint inuenta: nullas tamen fere alias Lunulas Geometrae examinarunt, quam quae Circulorum sunt progenies. Solus, quantum ego quidem scio, Cel. *Wolffius* Lunulas Cyclico-Parabolicas, hoc est, arcubus Circulari et Parabolico comprehensas, contemplatus est in Actis Lipſ. 1715. pag. 213. Cum vero infinitae dentur Curuae, quae quadrabiles habeant Lunulas: earum quasdam hoc scripto examinare constitui. In quo negotio duplex faciam Lunularum discrimen. Si enim curuae in vno tantum coëant puncto, vt efficiant Lunulas versus vnam partem apertas, eas vocabo Lunulas Apertas, reliquas vero Clausas.

§. 2.



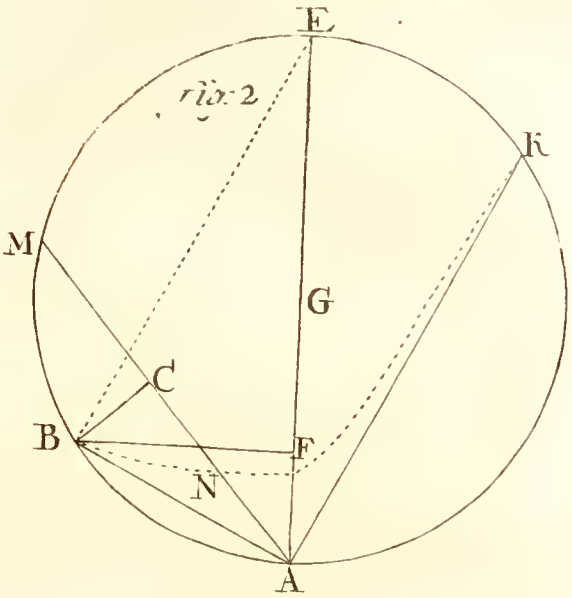
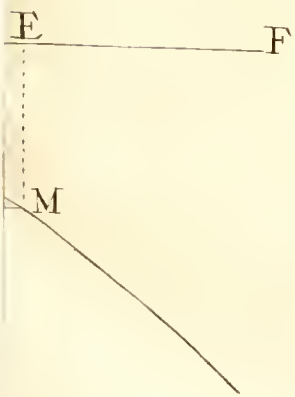


fig. 3



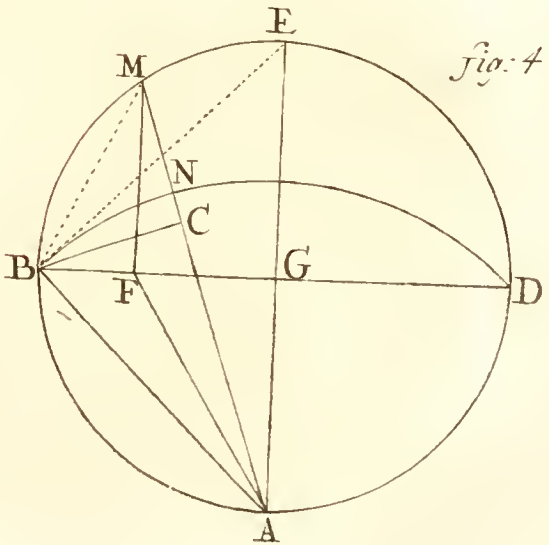


fig. 4

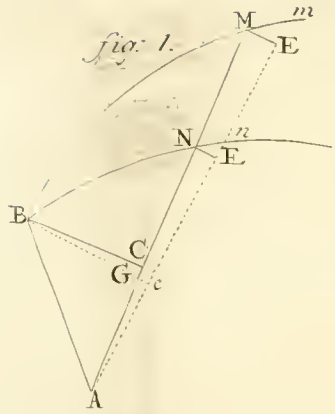


fig. 1.
M
m
E
N
n
E
B
C
G
c
A

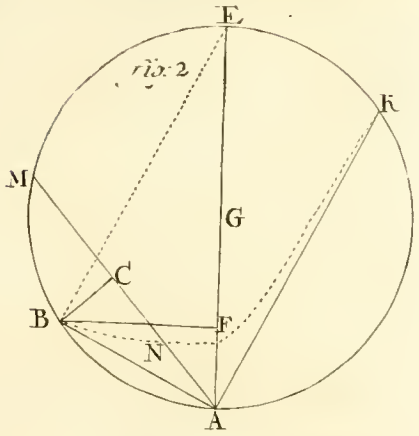
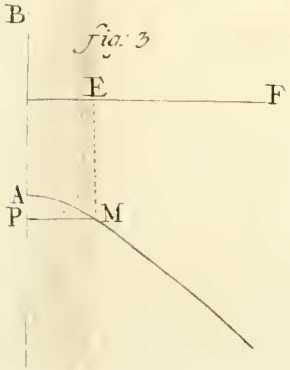
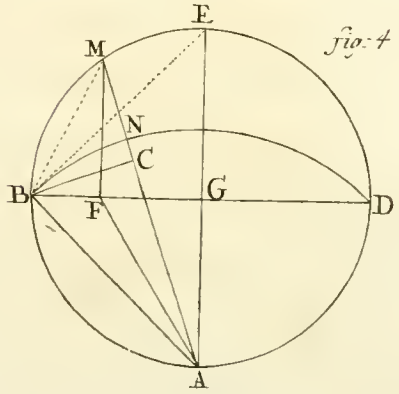


fig. 2
E
K
M
G
C
B
F
N
A


B
fig. 3
E
F
A
P
M

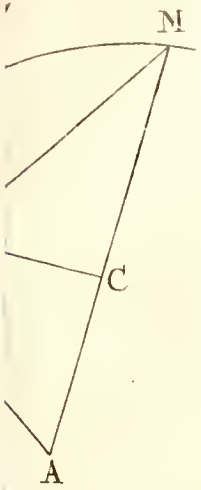

E
fig. 4
M
N
C
B
F
G
D
A

§. 2. Sit igitur Curua BM descripta ex Polo A, posita linea constanti BA; sit praeterea ex eodem Polo A alia Curua descripta BN: quaeritur, qualis, data BM, debeat esse altera BN, vt spatium interceptum Lunare BMN sit quadrabile. Ducantur in hunc finem recta AM, et huic alia infinite propinqua Am; centro A, radiis AM, AN, intelligantur descripti arcus circulares ME, NF, ex B demittantur perpendiculares infinite propinquae in AM et Am, quae sint BC et Bc et ponantur $AB = a$, $AM = t$, $AN = z$, $BC = u$, erit ergo $AC = \sqrt{(a^2 - u^2)}$, et ob sectores ANF, AME, AGc similes, est $AG(\sqrt{aa-uu}) : Gc(du) = AM(t) : ME(\frac{t\,du}{\sqrt{(a^2-u^2)}}) = AN(z) : NF(\frac{z\,du}{\sqrt{(a^2-u^2)}})$; hinc sector $AMm = \frac{1}{2} AM \times ME = \frac{t^2\,du}{2\sqrt{(a^2-u^2)}}$; sector AN$n$ ex eadem ratione $= \frac{z^2\,du}{2\sqrt{(a^2-u^2)}}$, quorum differentia $\frac{(t^2-z^2)\,du}{2\sqrt{(a^2-u^2)}}$ est Elementum portionis Lunaris BMN. Assumatur iam Functio ipsius u, quae sit P, talis, vt Pdu integrari possit, et ponatur Elementum modo inuentum $= P\,du$, erit area BMN quadrabilis; sed facta diuisione per du, elicitur valor ipsius $z = \sqrt{(t^2 - 2P\sqrt{aa-uu})}$. ergo dabitur z in meris u, consequenter obtinebitur Curua BN, quae datam habeat conditionem. Fig. 1.

§. 3. Sit Curua data BM Circulus ABEK, cuius centrum G; assumatur punctum quodcunque A pro Polo: quaeritur, qualis debeat esse Curua BN, vt spatium interceptum BNM sit quadrabile. Ducantur Diameter AGE, et demittantur perpendiculares BC, BF, in AM et AE; erit ergo retentis denominati- Fig. 2.

onibus §. 2. assumtis, $AN = \sqrt{(t^2 - 2P\sqrt{aa-uu})}$; vt vero habeatur valor ipsius t in u, considerandum est, quod ductis chordis BM, BE, anguli BMA, BEA, insistant eidem arcui AB; quare ob rectos C et F, triangula BMC, BEF, erunt similia; vnde vocatis $BF = b$, $EF = c$, habebitur analogia $BC(u) : CM(t - \sqrt{aa-uu}) = BF(b) : EF(c)$, hinc $t = \frac{cu + b\sqrt{aa-uu}}{b}$; quo substituto, fit $z = \frac{\sqrt{(cc-bb).u^2 + 2bcu - 2bb\,P.\sqrt{aa-uu} + a^2b^2)}}{b}$; quae est aequatio generalis omnium Curuarum BN, Circulo BME satisfacientium. Assumatur $P = \frac{cu}{b}$, quo facto $\int P\,du = \frac{cu^2}{2b}$, et $z = \frac{\sqrt{(cc-bb).u^2 + a^2b^2)}}{b}$. Itaque
Fig. 3. construatur Hyperbola AM, cuius latus transuersum $AB = 2a$, parameter $= \frac{2ab^2}{c^2-b^2}$, et ducta in Circulo quacunque recta AM ex Polo A, demissaque in hanc perpendiculari BC, applicetur in descripta Hyperbola $PM = BC$, atque ad axem coniugatum CF erigatur perpendicularis ME, cui in Circulo fiat aequalis ipsa AN, erit N in Curua BN tali, quae portionem Lunulae BMN efficit quadrabilem, nempe aequalem $\int P\,du = \frac{cu^2}{2b} = \frac{c}{2b} \times BC^2$, aut, ob $\frac{cu}{b} = CM$, eadem portio erit aequalis triangulo rectilineo BCM. Erunt autem omnes hae Lunulae Clausae. Ad hoc enim requiritur, vt aliquod punctum possibile sit, in quo $t = z$, hoc est $\sqrt{(t^2 - 2P\sqrt{aa-uu})} = t$, siue $u = a$. At si, in valoribus modo inuentis ipsius z aut t, substituatur $a = u$, orietur $z = \frac{ca}{b} = t$; hinc Curua BN Circulum secat in K, vbi AK educitur perpendicularis ad datam AB.

§. 4.



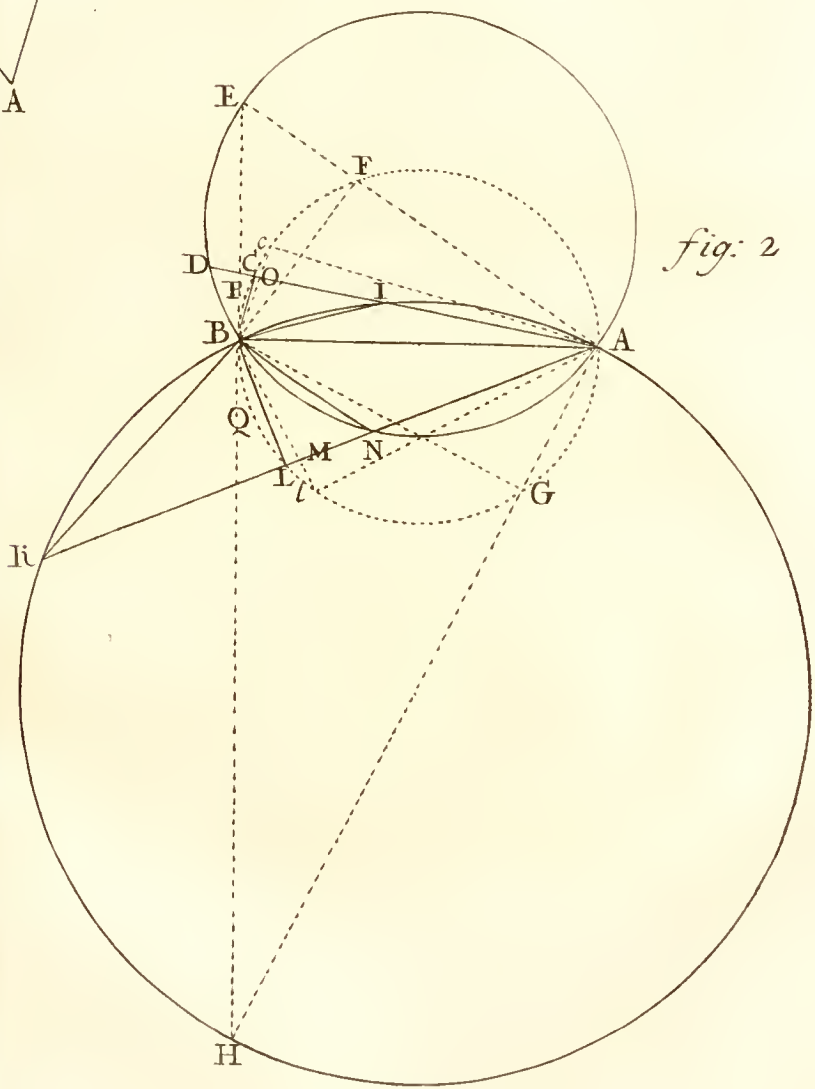


fig: 2

fig: 1

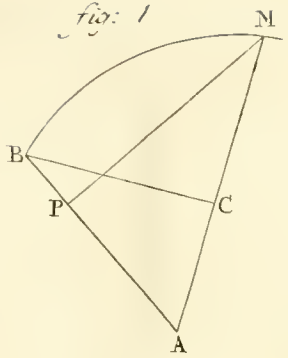
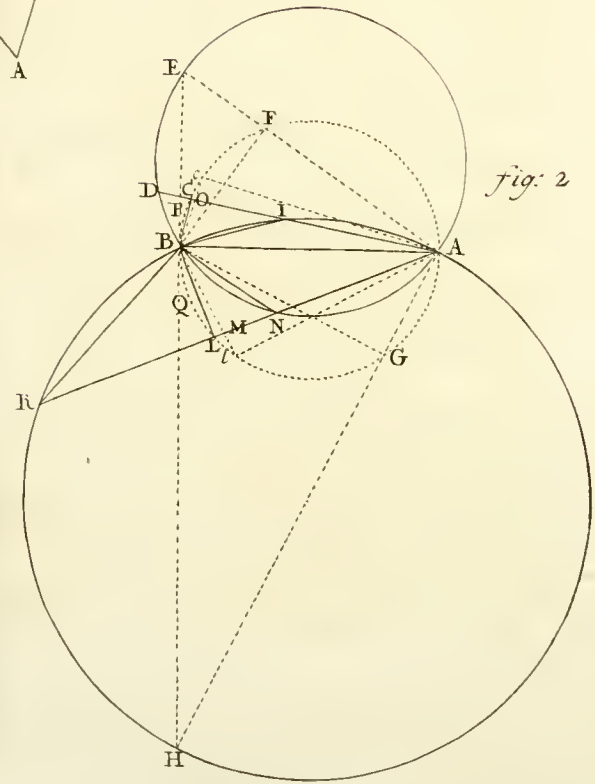


fig: 2



§. 4. Si vero in Circulo dato ABED, BA sit Quadrans Circuli, et BMA semirectus: erit ob BG perpendicularem ad AE, $b=c$, et BC=CM; atque in hoc casu fit $z=a$, per valores praemissos; quare Curua quaesita AN Circulus iterum est, descriptus radio AB; et hoc casu prodit Lunula Hippocratis, cuius portio indefinita BMN = triangulo rectilineo BCM, quemadmodum inuenit Anglus quidam *Ioh. Perks*, in Actis Philos. Angl. 1677, mense Decembri; aut vero etiam, demissa in Diametrum perpendiculari MF, triangulo ABF, vti Illustr. *Tschirnhusio* placuit, in Actis Lipsi. 1687. m. Sept. Est enim ob semirectos GBA, CBM, aequales, addito communi CBG, angulus MBF=CBA, adeoque triangula rectangula MBF, ABC similia; hinc AB:BC=BM:BF, aut AG$\sqrt{2}$:BC=BC$\sqrt{2}$:BF, hinc AG×BF=BC^2, quare praedicta triangula sunt aequalia. Patet vero ex inuenta superiori formula ipsius z, simplicissimum hunc esse casum, quem modo examinaui; et aequationes prodire altioris gradus, quas molestum esset examinare, si alius valor ipsius P assumatur. Fig. 4.

§. 5. Sit aequatio curuae datae BM haec, $t^2=b\sqrt{aa+uu}$, erit curuae quaesitae BN aequatio $z^2=t^2-2P\sqrt{aa-uu}=(b-2P)\sqrt{aa-uu}$. Ponatur etiam P aequalis constanti $=\frac{b-m}{2}$, erit curuae quaesitae natura $z^2=m\sqrt{aa-uu}$, quae aequatio cum similis sit datae $t^2=b\sqrt{aa-uu}$: in hoc casu vtraque curua, data et quaesita, erunt similes, et similiter positae circa Polum A, atque Tabula X. Fig. 1.

atque $z:t=\sqrt{m}:\sqrt{b}$. Huius autem curuae, $t^2=b\sqrt{aa-uu}$ aequatio, vti quoque reliquarum, facile mutatur in aliam ad coordinatas orthogonias; vocentur enim assumto axe AB, $BP=x$, $PM=y$, eritque ob triangula MPA et BCA similia, $AM(t):PM(y)=AB(a):CB(u)$, hinc $t=\frac{ay}{u}$; porro $AM(t):AP(a-x)=AB(a):AC(\sqrt{aa-uu})$; vnde $t=aa-ax.\sqrt{aa-uu}$, qui valores aequati exhibent $\sqrt{(a^2-2ax+x^2+y^2)}=t$, et $\frac{ay}{\sqrt{(a^2-2ax+x^2+y^2)}}=u$, quorum ope aequatio proposita abit in hanc: $(\overline{a-x}^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=ab.\overline{a-x}$. Sed notandum est, talem Lunulam fore Apertam versus B. Nam ab initio, vbi $u=o$, fit $t^2=ba$, et $z^2=ma$; in fine vero, vbi $u=a$, fit $t=o$, $z=o$, vnde Lunula terminabitur in puncto A.

Fig. 2. §. 6. Intersecent se duo circuli quicunque, quomodocunque in B et A; ducatur chorda communis AB, cum arbitraria AI; et demissa in eam perpendiculari BC, per centra transeant rectae AE, AH, demissis perpendiculis in easdem BF, BG. Erit positis vt ante $AB=a$, $AD=t$, $AI=z$, $BC=u$, $BF:FE=1:m$, $BG:GH=1:n$, portio indefinita curuilinea $IBD=\int\frac{(t^2-z^2)du}{2\sqrt{(a^2-u^2)}}$; sed ob triangula similia rectangula BDC et BEF, nec non BCI et BGH, fit $CB(u):CD(t-\sqrt{aa-uu})=BF:FE=1:m$; hinc $t=mu+\sqrt{aa-uu}$. Deinde $CB(u):CI(\sqrt{aa-uu}-z)=BG:GH=1:n$, vnde $z=\sqrt{aa-uu}-nu$; substitutis hisce valoribus in formula differentiali allegata, prodit portionis curuilineae BID

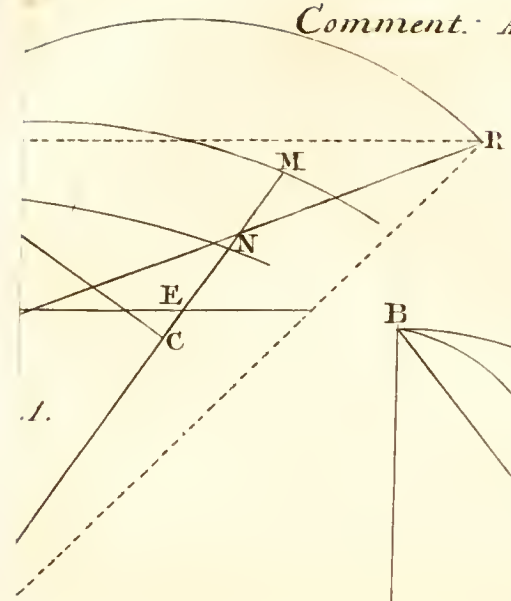
BID area $= \frac{m^2-n^2}{2} \int \frac{u^2 du}{\sqrt{(a^2-u^2)}} + \overline{m+n}.\int u du$; quare ſi ponatur $m = n$, hoc eſt, ſi Circuli ſeſe interſecantes fuerint aequales, erit in omni ſitu Circulorum portio BID quadrabilis, et eius area $= mu^2$, quod primo animaduerſum eſt ab Ill. *Hoſpitalio*, in Comment. Acad. Scient. Pariſ. Anno 1701, et facile etiam ex Geometria Elementari perſpicitur. Diametro BA deſcribatur Circulus, qui transibit per puncta C et F, in hoc ducatur alia Ac, priori infinite propinqua, erit CA$(\sqrt{aa-uu})$: O$c$$(du)$ = BC(u):CO$(\frac{u\,du}{\sqrt{aa-uu}})$, ob ſimilia triangula BCO et AcO; ergo BCc $= \frac{1}{2}$BC×CO $= \frac{u^2 du}{2\sqrt{(a^2-u^2)}}$, conſequenter ſegmentum BPC $= \int \frac{u^2 du}{2\sqrt{(a^2-u^2)}}$, et $\overline{nm-nn}.\int \frac{u^2 du}{2\sqrt{(a^2-u^2)}} = (mm-nn)$ ſegm. BPC, adeoque poſitis Circulis inaequalibus, portio indefinita Lunulae BID $= \frac{m+n}{2}u^2 + (mm-nn)$ ſegm. BPC. Ita eodem modo elicitur, vocata BL $= v$, BNK $= \frac{m+n}{2}v^2 + \overline{nn-mm}.$ ſegm. BQL. Hac occaſione facilis quoque emergit conſtructio ſequentis Problematis Geometriae Elementaris, cuius forſan alia methodo ſatis impedita proueniret ſolutio: nempe, datis Circulis quibuscunque ſe interſecantibus in A et B, ducere ex A duas rectas AD, AK, vt ſegmenti intercepta ID, NK, ſint aequalia. Eſt enim AK $= nv + \sqrt{aa-vv}$, AN $= \sqrt{aa-vv}-mv$; AD $= mu + \sqrt{aa-uu}$, AI $= \sqrt{aa-uu}-nu$; quamobrem $(n+m)v = \overline{n+m}.u$, ſiue $v = u$; accipiendae igitur ſunt tantummodo in Circulo AFL duae chordae BL, BC aequales, et per puncta C et L ducendae rectae quaeſitae; aut quoque, ſi eaedem chordae BL, BC,

sumantur in ratione quacunque data $1:p$, erunt etiam segmenta intercepta ID, NK, in eadem ratione $1:p$.

Tabula XI. Fig. 1.

§. 7. Sit curua BM Conchois exterior, in qua AB, ED, perpendiculariter se intersecantibus, sit EM $=$ DB. Si iam vocatis, vt antea, AB $=a$, BD $=b$, AM $=t$, BC $=u$, AN $=z$, fiat AC $(\sqrt{aa-uu})$: AB (a) = AD $(a-b)$: AE $(\frac{a\sqrt{(a-b)}}{\sqrt{(a^2-u^2)}})$ fit valor ipsius $t = b + \frac{am}{\sqrt{(a^2-u^2)}}$, posito $a-b=m$. Ponatur $P = \frac{abm}{a^2-u^2}$ erit $P\,du = \frac{abm\,du}{a^2-u^2} = \frac{\frac{1}{2}bm\,du}{a+u} + \frac{\frac{1}{2}bm\,du}{a-u}$, vnde $\int P\,du = \frac{1}{2}bm$ log. $\overline{a+u} - \frac{1}{2}bm$ log. $\overline{a-u}$, quare Lunula FB MN per Logarithmos erit quadrabilis; et aequatio polaris Curuae FN erit $z^2 = \frac{aa.\overline{bb+mm}-b^2u^2}{a^2-u^2}$, vel posita $a = 2b$, consequenter $m = b$, erit aequatio dictae curuae $z = \frac{a\sqrt{2aa-uu}}{2\sqrt{aa-uu}}$; vnde ducta BR perpendiculari ad AB, et aequali ipsi AB, erit AR $= \sqrt{2aa}$, descripto praeterea semi-circulo super AR, et chorda AS facta $= u$, erit SR $= \sqrt{(2a^2-u^2)}$. Ergo quaeratur tertia proportionalis ad 2AC, SR, et AB, transferatur ea in ductam antea pro lubitu AN ex polo A; erit punctum N in Curua quaesita BN, quae abscindet a spatio Conchoidali Lunulam BMNF quadrabilem per Logarithmos. Si ponatur $u = o$, erit ab initio Curuae $z = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, et $t = a$, quare $z:t = \sqrt{2}:2 =$ AF : AB; si vero $u = a$, erit $z = \infty$, $t = \infty + \frac{1}{2}a$; quare Lunula haec ex vtraque parte erit aperta, adeoque Lunula tantum improprie sic dicta.

§. 3.



.1.

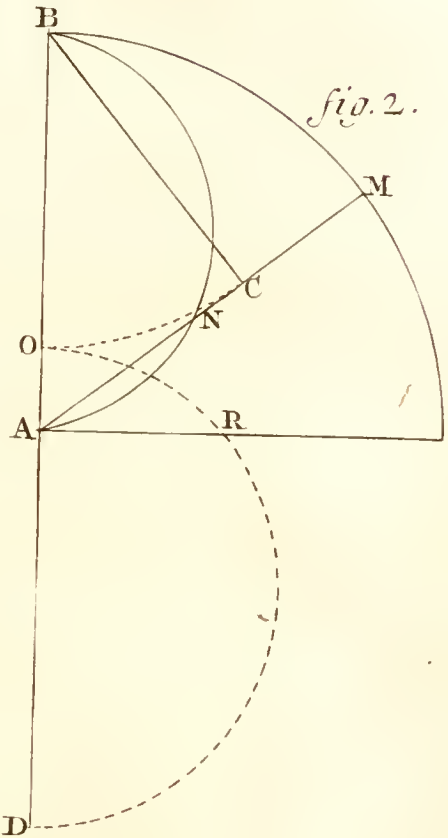
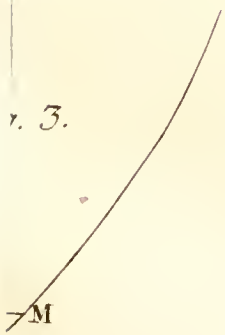


fig. 2.



r. 3.

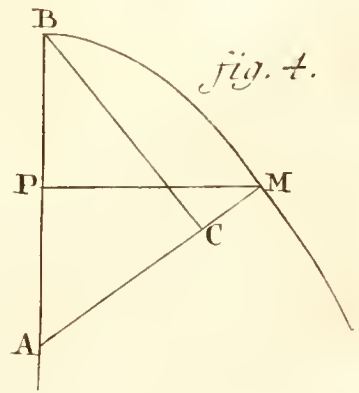


fig. 4.

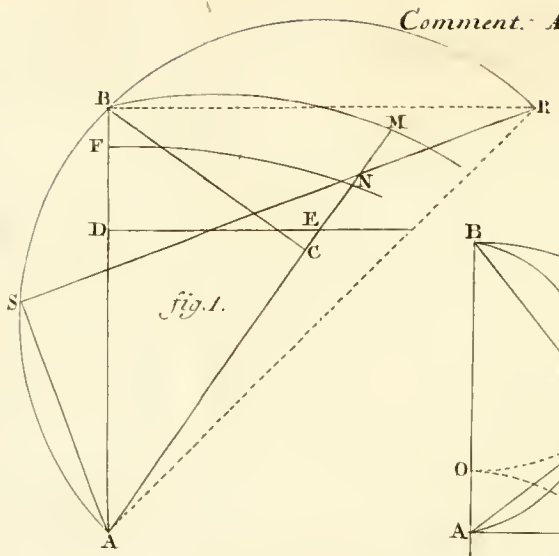


fig. 1.

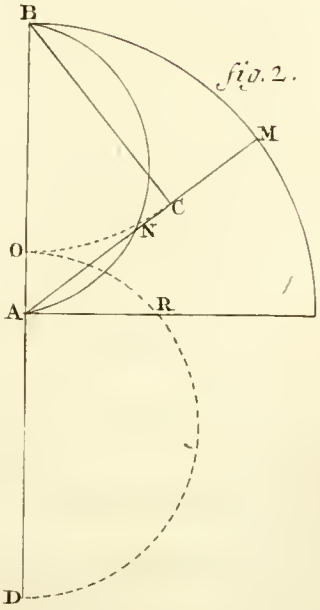


fig. 2.

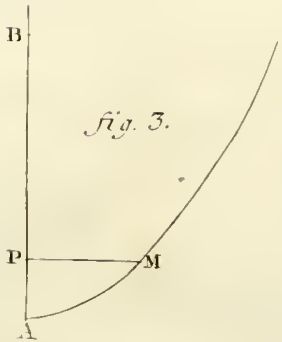


fig. 3.

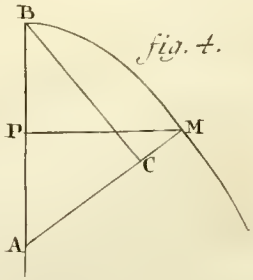


fig. 4.

§. 8. Sit Quadrans Circuli AEB, et Polus aſſumatur in centro A, erit vocatis $AM = t$, $AB = a$, $BC = u$, $AN = z$, aequatio polaris haec, $a = t$; quare pro Lunula $z^2 = a^2 - 2P\sqrt{aa-uu}$; aſſumatur $P = \frac{au}{2\sqrt{(a^2-u^2)}}$, quo poſito $P\,du$ integrari poterit; atque erit aequatio curuae quaeſitae $z^2 = a^2 - au$. Igitur conſtruatur Parabola, cuius parameter $= a = BA$, fiat in ea $BP = u$, erit $PA = a - u$, et $PM^2 = a^2 - au = z^2$; quare facta $AN = PM$, erit N in Curua quaeſita. Ab initio Curuae, vbi $u = o$, eſt $z = a$, quare Lunula haec clauſa erit in B; ſed in fine ſit $z = o$, ergo ibi Lunula eſt aperta; fit autem $\int P\,du = \frac{aa - a\sqrt{aa-uu}}{2}$. Vel potius, pro inueniendo puncto N, ponatur $BO = BC$, et producatur radius BA in Diametrum BD, deinde radio $\frac{1}{2}OD$ deſcribatur ſemi-circulus ORD, erit $AR = AN$. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 2.

§. 9. Sit Parabola BM, in qua aſſumatur polus in Axe A; et $AB = a$, $AM = t$, $BP = x$, $PM = y$; parameter Parabolae $= 4a$, vt punctum A ſit in Foco Parabolae; erit $AB(a) : CB(u = AM(t) : PM(y)$, hinc $y = \frac{tu}{a}$; nec non $AB(a) : AC(\sqrt{aa-uu}) = AM(t) : AP(a-x)$, vnde $x = \frac{a^2 - t\sqrt{aa-uu}}{a}$; igitur ob $4ax = y^2$, erit aequatio polaris $4a^4 - 4a^2 t\sqrt{aa-uu} = t^2 u^2$; vnde deducitur, facta $P = -\frac{4a^5}{u^4}$, et $\int P\,du = \frac{4a^5}{3u^3}$, $z = \frac{2a^2\sqrt{2a^2-u^2}}{u^3}$; hinc ab initio, vbi $u = o$, eſt $z = \infty$, in fine vero, vbi $u = a$, $z = t$. Fig. 4.

Tabula XII. Fig. 1.

§. 10. Ex conſideratione Lunulae *Hippocratis* facilis fluit Demonſtratio Quadraturae abſolutae portionis alicuius in Cycloide, cuius mentio fit in Analyſi infinite paruorum Ill. *Hoſpitalii* §. 99. Sit enim Lunula $\gamma\beta\vartheta\xi$, et circulo generatore $\gamma\beta\vartheta$ deſcripta Cyclois $\gamma\Phi\lambda$; ſit radius $\alpha\gamma = r$, Quadrans circuli $\alpha\beta\gamma = Q$, erit $\alpha\Phi = \alpha\beta + \beta\Phi = r + \gamma\beta$, ex natura Cycloidis; hinc $r \times \alpha\Phi = r^2 + r \times \gamma\beta =$ Lunulae $+ 2Q$; porro eſt $r \times \alpha\Phi = \gamma\beta\Phi + \gamma\delta\Phi + Q$; ergo ob $\gamma\delta\Phi = Q$, quod alias notum eſt, erit $r \times \alpha\Phi = \gamma\beta\Phi + 2Q$; conſequenter aequatis his duobus valoribus ipſius $r \times \alpha\Phi$, erit $\gamma\beta\Phi + 2Q =$ Lunulae $+ 2Q$, aut $\gamma\beta\Phi =$ Lunulae; quae cum ſit quadrabilis: etiam ſpatium Cycloidale ipſi aequale quadraturam admittit abſolutam.

Fig. 2.

§. 11. Quaeram nunc alia adhuc via Lunulas Quadrabiles, quae huc redit, vt data Curua AM non quadrabili, quaeratur alia AN itidem non quadrabilis, eius tamen naturae, vt differentia vtriusque areae APM $-$ APN quadraturam admittat. Id ſequenti modo fieri poterit. Sit $AP = x$, $PM = y$, $PN = u$, et poſita M Functione arbitraria ipſius x, fiat pro Curua quaeſita AN, $u = y - \frac{dM}{dx}$. Nam ex hac aſſumtione erit $udx = ydx - dM$. aut $dM = ydx - udx$, quare integrando $\int ydx - \int udx = M =$ AMN. Erit autem porro $\int udx = \int ydx - M$; hinc, niſi Curua APM quadrabilis exiſtat, neque APN talis erit.

§. 12. Si M aſſumatur huius formae x^m, et data Curua AM ſit ſectio Conica, hoc eſt, $y = \sqrt{(a + bx +$

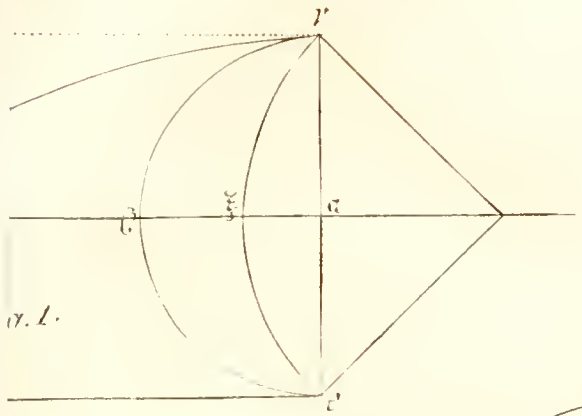


fig. 1.

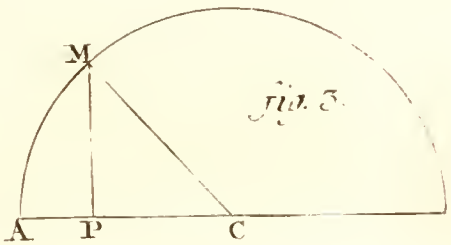


fig. 3.

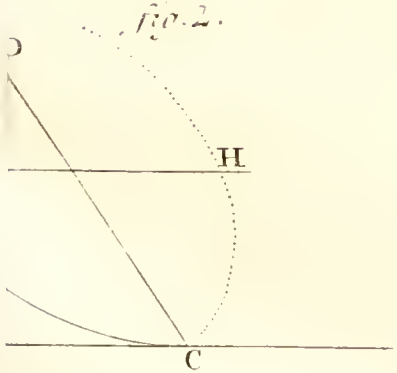


fig. 2.

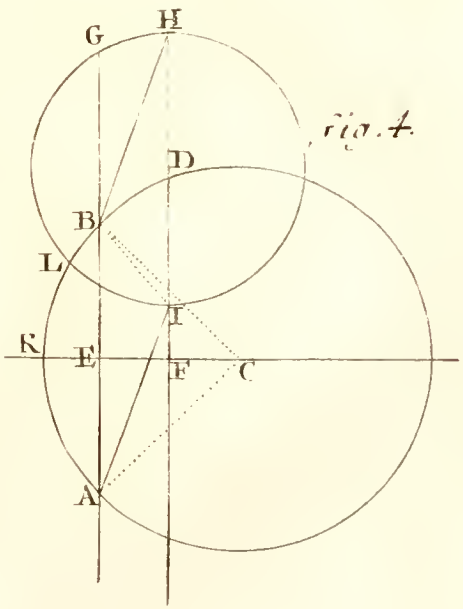
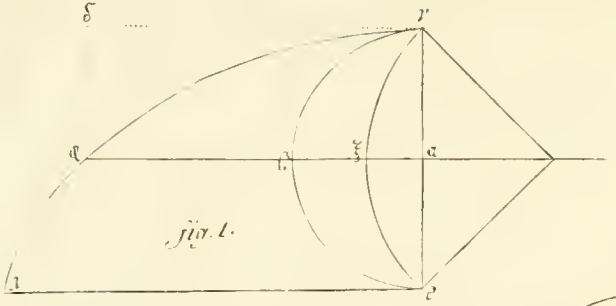


fig. 4.



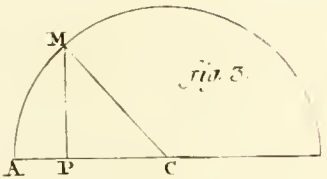


fig. 3.

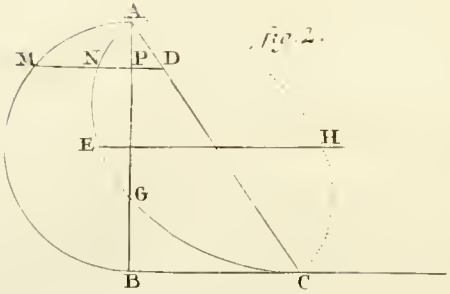


fig. 2.

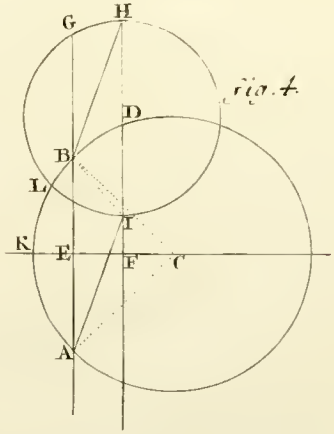


fig. 4.

$bx+cx^2$), prodibit aequatio Curuae quaesitae, $u^2 + 2mux^{m-1} + m^2x^{2m-2} - cx^2 - bx - a = o$, quae, si etiam debeat esse vna sectionum Conicarum, necesse est, vt sit $2m-2=2$, aut vero $m=2$; quo subrogato fit $u^2+4ux+(4-c)x^2-bx-a=o$; aut etiam $m=1$, quo facto emergit $u^2+2u-cx^2-bx+1-a=o$.

§. 13 Sit Curua data AMB semicirculus, cuius Diameter $AB=a$, $AP=x$, $PM=y$, erit $y=\sqrt{(ax-x^2)}$; ponatur $M=bx^2$, erit $\frac{dM}{dx}=2bx$, quare $u=y-2bx$, aut $u^2+4bux+(4bb+1)x^2-ax=o$, quae aequatio est ad Ellipsin circa Diametrum AC descriptam, in qua $AC=a\sqrt{4bb+1}$, et $BC=2ab$. Erit igitur spatium Lunare indefinitum $AMN=bx^2$, et posita $x=a$, integra Lunula aperta $ANECBMA=ba^2$. Vt determinetur punctum intersectionis G, fiat $u=o$. vnde oritur $AG=\frac{a}{4b^2+1}$, ergo si $b=\frac{1}{2}$, hoc casu Ellipsis transibit per centrum Circuli dati. Si assumatur $b=1$, erit $M=x^2$, $AG=\frac{1}{5}a$, $BC=2a$, consequenter $Pd=2x$, et portio Lunaris $ANM=x^2=$ triangulo APD; addita ergo communi portione Elliptica ANP, trilineum Ellipticum ANPD aequale euadet segmento circulari AMP; poterit ergo hac via, dato cuicunque segmento circulari, inueniri aequale segmentum Ellipticum.

§. 14. Sit Curua data Ellipsis AMF, in qua $AP=x$, $PM=y$, $PN=u$, $AB=a$, parameter $=b$, erit

$y = \frac{\sqrt{(a^2 px - apx^2)}}{a}$; assumatur $M = \frac{1}{2}x^2$, erit $\frac{dM}{dx} = x$, quare orietur $u = y - x$, aut $u^2 + 2ux + \frac{a+p}{a}x^2 - px = 0$, quae aequatio rursus est ad Ellipsin, cuius diameter $AC = a\sqrt{2}$, parameter huius Diametri $= \frac{p}{\sqrt{2}}$, et BC, perpendicularis ad Diametrum Circuli, $= a$; inuenitur quoque $AG = \frac{ap}{a+p}$; erit ergo Spatium Lunare $AMN = \frac{1}{2}x^2 =$ triangulo APD.

Fig. 3. §. 15. Sit in semicirculo radius $AC = R$, $AP = x$, $PM = y$, erit arcus $AM = \int \frac{R\,dx}{\sqrt{(2Rx - x^2)}}$. Huius Elementi Integratio fiat per quantitates imaginarias, iuxta methodum Cel. *Ioh. Bernoulli*, hoc est, ponatur $\sqrt{(2Rx - x^2)} = p - x\sqrt{-1}$, emerget $AM = \int \frac{R\,dp\sqrt{-1}}{R-p} =$ $R\sqrt{-1} \times \log. \frac{R}{R-x-y\sqrt{-1}}$, vt nempe euanescente x, fiat $AM = 0$. Quo arcu sic obtento, erit sector $ACM = \frac{AM \times MC}{2} = \frac{R^2\sqrt{-1}}{2} \log. \frac{R}{R-x-y\sqrt{-1}}$, vnde facto $x = 2R$, et consequenter $y = 0$, erit semi-circulus $AMD = \frac{R^2\sqrt{-1}}{2}$ log. (-1).

§. 16. Soluitur exinde Problema elegans a Celeb. *Goldbachio* iam ante plures annos propositum, cuius solutionem Syntheticam dedit, elegantem sane, Celeb. *Daniel Bernoulli* in Exercitat. Mathematicis Anno 1724. editis. Problema tale est, vt in duabus Lunulis ex Circulis inaequalibus, et se in vicem intersecantibus, ortis, rescecentur vtrinque, lineis aequalibus, partes aequales, ita vt $AI = HB$, et spatium $AIL = HBL$. Ana-
Fig. 4. lysis sequens dari potest. Sit Circulus quicunque HLI, cuius centrum D, per quod agatur in infinitum Diameter HDF, et huic parallela quaecunque GBEA.

In

In recta GA assumto puncto arbitrario B, fiat BA = Diametro HI; in medio E, ipsius BA, erigatur perpendicularis EC = 2EF, deinde centro C, radio CB, describatur nouus Circulus BLA, qui priorem intersecabit in L. Manifestum est, si sector hic ACB fuerit aequalis semi-circulo HLI, Problema solutum esse. Erit enim ob parallelas GA, HF, et BA = HI, etiam AI = BH, quae est conditio Problematis prima; et quadrilineum BIAC = $\frac{1}{2}$ triang. BCA = BHI. Quare ablatis aequalibus BIAC et BHI, hinc a sectore, illinc a semicirculo; ablata quoque portione communi LBI, remanebunt spatia HGLB et LIA aequalia. Pro obtinenda igitur aequalitate sectoris ACB et semicirculi HLI, erit positis radio HD = r, et distantia EF = e, per §. praec. area semi-circuli HLI = $\frac{r^2\sqrt{-1}}{2}$ log. (-1). Porro erit EC = 2EF = $2e$, BA = HI = $2r$, et consequenter BE = r; hinc radius noui Circuli CB = $\sqrt{(r^2+4e^2)}$, et KE = KC − EC = $\sqrt{(r^2+4e^2)} - 2e$. Substituto igitur pro R §. praec. valore ipsius CB $\sqrt{(r^2+4e^2)}$, fiet area sectoris KCB = $\frac{(r^2+4e^2)\sqrt{-1}}{2}$ log. $\frac{\sqrt{(r^2+4e^2)}}{2e-r\sqrt{-1}}$, aut vero sector ACB = duplo prioris = $(r^2+4e^2)\sqrt{-1}$ log. $\frac{\sqrt{(r^2+4e^2)}}{2e-r\sqrt{-1}}$. Quare, aequatis hisce valoribus, oritur aequatio sequens $\frac{r^2 \log.-1}{2} - (r^2+4e^2)$ log. $\frac{\sqrt{(r^2+4e^2)}}{2e-r\sqrt{-1}} = 0$, quae euanescit, si pro e ponatur valor $\frac{1}{2}r$. Fit enim, facta hac substitutione, et diuisione per r^2, aequatio haec $l-1 = 4l\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{-1}}$, et sumtis numeris absolutis, $-1 = (\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{-1}})^4 = \frac{2^2}{(1-\sqrt{-1})^4} = \frac{4}{-4} = -1$. Sin itaque sumatur EF = $\frac{1}{2}r$, Problemati satisfiet. Erit autem tunc CB = $r\sqrt{2}$, quare ratio radiorum vtriusque Circuli erit vti $1 : \sqrt{2}$.

SPE-

SPECIMEN
DE CONSTRVCTIONE AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM SINE INDETERMINATARVM SEPARATIONE.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

INdeterminatarum ſeparationem in aequationibus differentialibus ideo tam ſollicite deſiderari, quod ex ea inuenta aequationis conſtructio ſponte fluat, cuique in his rebus exercitato ſatis perſpectum eſſe arbitror. Integratio praeterea aequationum differentialium, ſiquidem ſuccedit, optime indeterminatis ſeparandis inſtituitur. Quamquam enim innumerabiles dantur aequationes, quarum integrales ſine huiusmodi ſeparatione inueniri poſſunt, cuiusmodi methodum exhibuit Celeb. *Ioh. Bernoulli* in Comm. noſtrorum Tom. I. pag. 167; tamen eae aequationes omnes ita ſunt comparatae, vt vel per ſe obuia ſit indeterminatarum ſeparatio, vel ſaltem ex ipſa integratione facile deriuetur. Similis vero eſt etiam ratio conſtructionum, quibus adhuc vſi ſunt Analyſtae, ſunt enim omnes huiusmodi, vt aequationis, ſi nullo alio modo indeterminatae a ſe inuicem ſeparari poſſunt, ſeparatio tamen ex ipſa conſtructione proficiſcatur. Hanc ob rem nullam adhuc exhiberi poſſe exiſtimo aequationem differentialem conſtruibilem, cuius ſeparatio omnes vires eluderet.

§. 2.

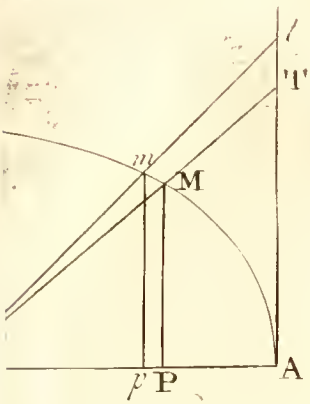


fig. 1.

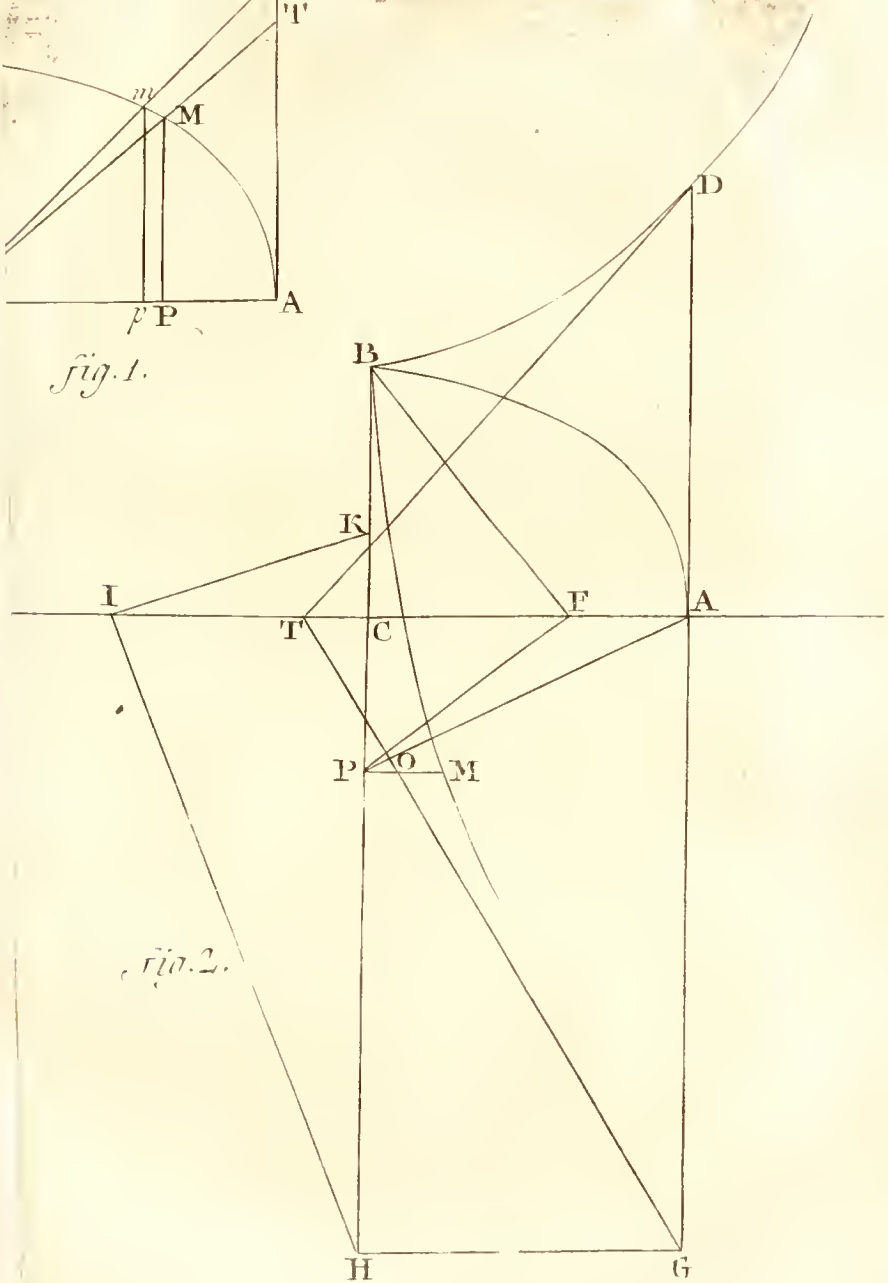


fig. 2.

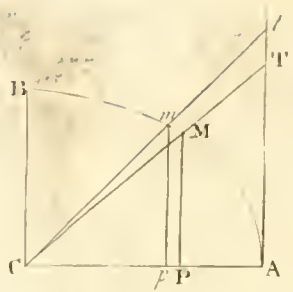


fig. 1.

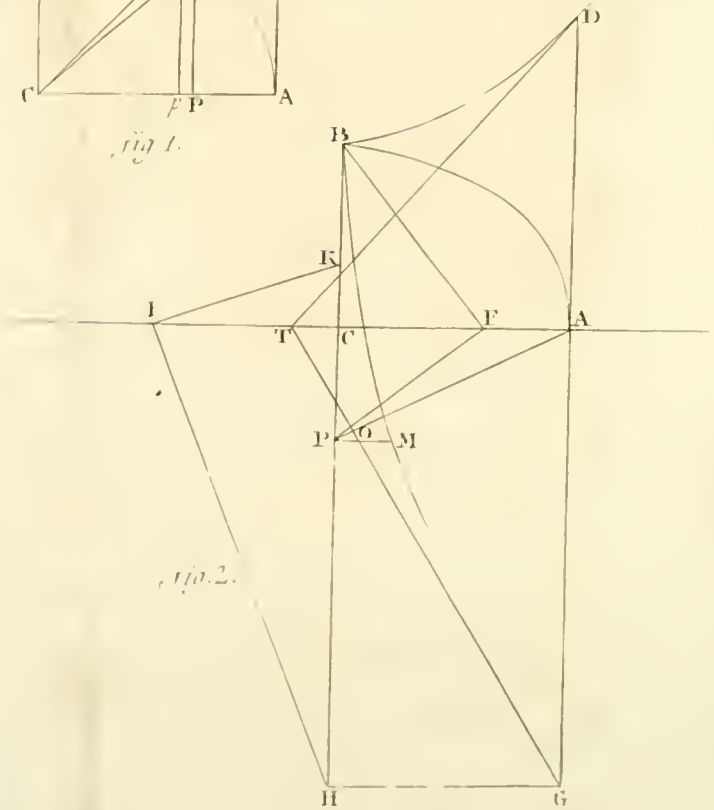


fig. 2.

§. 2. Nuper autem in ellipſi rectificanda occupatus inopinato incidi in aequationem differentialem, quam ope rectificationis ellipſis conſtruere poteram, neque tamen indeterminatarum ſeparatio nequidem ex ipſo conſtruendi modo inueniri poterit. Aequatio vero quam obtinui erat haec $dy + \frac{y^2 dx}{x} = \frac{x dx}{x^2 - 1}$ Riccatianae fere ſimilis, et forte ad ſeparandum aeque difficilis ac haec $dy + y^2 dx = x^2 dx$. Caſus hic mihi primum vehementer paradoxus videbatur; at conſtructione attentius perſpecta facile intellexi ex ea non ſolum ſeparationem indeterminatarum non poſſe deduci, ſed etiam, ſi alio modo ſeparatio haec ſuccederet, multo maiora ſequutura eſſe abſurda; comparationem ſcilicet perimetrorum ellipſium diſſimilium, quae, vt mihi quidem videtur, omnem analyſin ſuperat. Conſtructio autem ipſa perquam eſt facilis, perficitur enim elongatione infinitarum ellipſium alterutrum axem communem habentium, et hanc obrem conſueto per quadraturas conſtruendi modo longe eſt praeferenda.

§. 3. Proponam igitur totam rem, prout ad eam perueni. Sit ACB quadrans ellipticus, cuius centrum C, ſemi-axes vero AC et BC. Ponantur $AC = a$ et $BC = b$, et ex A ducatur tangens indefinita AT, ad eamque ex centro C ſecans quaecunque CT, abſcindens arcum $AM = s$, voceturque $AT = t$. Demiſſo ex M in AC perpendiculo vocetur $CP = x$, erit ex natura ellipſis $PM = \frac{b\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a}$; atque ob analogiam $CP : PM = CA : AT$ habebitur $tx = b\sqrt{(a^2 - x^2)}$ ſeu $x = \frac{ab}{\sqrt{(bb + tt)}}$ Tabula XIII Fig. 1.

Sumatur arcus AM elementum Mm, ducanturque mp, Ct prioribus MP, CT proximae; erit Mm, $ds = \frac{-dx\sqrt{(a^4-(a^2-b^2)x^2)}}{a\sqrt{(a^2-x^2)}}$ et T$t = dt$. Quia autem est $x = \frac{ab}{\sqrt{(b^2+t^2)}}$, erit $dx = \frac{-abtdt}{(b^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}$, et $\sqrt{(a^2-x^2)} = \frac{at}{\sqrt{(b^2+t^2)}}$, et $\sqrt{(a^4-(a^2-b^2)x^2)} = \frac{a\sqrt{(b^4+a^2tt)}}{\sqrt{(b^2+t^2)}}$. Ex his conficitur $ds = \frac{bdt\sqrt{(b^4+a^2tt)}}{(bb+tt)^{\frac{3}{2}}}$. Ad cuius integrale per seriem saltem inueniendum pono $a^2 = (n+1)b^2$, quae prodeat $ds = \frac{b^2dt\sqrt{((b^2+t^2)+nt^2)}}{(b^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}$, superiusque irrationale fit binomium, cuius alterum membrum est b^2+t^2, alterumque simplex terminus nt^2. Resoluo nunc $\sqrt{((b^2+t^2)+nt^2)}$ per canonem notum in seriem hanc $(b^2+t^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{Ant^2}{(b^2+t^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{Bn^2t^4}{(b^2+t^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{Cn^3t^6}{(b^2+t^2)^{\frac{5}{2}}}$ + etc. in qua breuitatis gratia est $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{-1\cdot 1}{2\cdot 4}$, $C = \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}$, $D = \frac{-1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}$ etc. Habebitur ergo $ds = \frac{b^2dt}{b^2+t^2} + \frac{Ab^2nt^2dt}{(b^2+t^2)^2} + \frac{Bb^2n^2t^4dt}{(b^2+t^2)^3} + \frac{Cb^2n^3t^6dt}{(b^2+t^2)^4}$ + etc. et integer arcus ellipticus s erit integrale huius seriei.

§. 4. Notandum hic est singulorum horum terminorum integrationem ad primi termini $\int\frac{bbdt}{bb+tt}$ posse reduci, dat vero $\int\frac{bbdt}{bb+tt}$ arcum circuli radii b cuius tangens est t. Hanc ob rem singulos terminos assumto hoc circulari arcu integrabo, vt sequitur: $\int\frac{b^2t^2dt}{(b^2+t^2)^2} = \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{bb\,dt}{bb+tt} - \frac{1}{2}\frac{b^2t}{bb+tt}$, $\int \frac{b^2t^4dt}{(b^2+t^2)^3} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\int \frac{b^2dt}{bb+tt} - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{b^2t}{bb+tt}$ $- \frac{1}{4}\frac{b^2t^3}{(bb+tt)^2}$, $\int \frac{b^2t^6dt}{(b^2+t^2)^4} = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\int \frac{b^2dt}{bb+tt} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{b^2t}{bb+tt}$ $- \frac{1\cdot 5}{4\cdot 6}\cdot\frac{b^2t^3}{(bb+tt)^2} - \frac{1}{6}\cdot\frac{b^2t^5}{(bb+tt)^3}$, ex quibus lex integralium reliquorum terminorum iam satis apparet.

§. 5. Si quarta perimetri elliptici pars AMB requiratur, oportet facere t infinitum, hocque facto omnes termini algebraici in superioribus integralibus euanescunt. Arcus circularis vero $\int \frac{bb\,dt}{bb+tt}$ posito $t = \infty$ dabit quartam peripheriae circuli partem, cuius radius est b seu BC, quam designabimus littera e. Erit propterea $\int \frac{b^2dt}{bb+tt} = e$, $\int \frac{b^2t^2dt}{(bb+tt)^2} = \frac{1\cdot e}{2}$, $\int \frac{b^2t^4dt}{(bb+tt)^3} = \frac{1\cdot 3\cdot e}{2\cdot 4}$, $\int \frac{b^2t^6dt}{(bb+tt)^4} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot e}{2\cdot 4\cdot 6}$ etc Prodibit igitur quarta perimetri elliptici pars AMB $= e\left(1 + \frac{1}{2}An + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}Bn^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}Cn^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}Dn^4 + \text{etc.}\right)$. Atque substitutis loco A, B, C, D, etc. valoribus debitis habebitur $AMB = e\left(1 + \frac{1}{2\cdot 2}n - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}n^2 - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6}n^3 - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8}n^4 + \text{etc.}\right)$

§. 6. Haec series, si n est valde paruum seu $\frac{c^2-b^2}{b^2}$ id quod euenit, quoties ellipsis admodum propinqua est circulo, vehementer conuergit; hocque casu igitur facile ellipsis perimeter inuenitur. Quando vero n est quantitas, quam minima, seu $a = b + \omega$, denotante ω quantitatem quam minimam, erit $n = \frac{2\omega}{b}$, et $AMB = e\left(1 + \frac{\omega}{2b}\right)q.p.$ Quando vero fit $a = o$, incidit punctum A in C, et euadit $AMB = BC = b$; hoc vero casu erit $n = -1$, habebitur igitur $\frac{b}{e} = 1 - \frac{1}{2\cdot 2} - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4} - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6} - \text{etc.}$ Summa huius seriei ergo exprimit

rationem radii ad quartam peripheriae partem in circulo.

7. Quemcunque igitur habeat valorem littera n in ſerie §. 5. inuenta, ſumma ſeriei ſemper poterit aſſignari ope rectificationis ellipſis, cuius axis maior ſe habet ad minorem, vt $\sqrt{(n+1)}$ ad 1. Hoc cum ita ſe habeat, vſus ſum quoque methodo mea ſummationes ſerierum ad reſolutionem aequationum reducendi, quam nuper exhibui, vt inueſtigarem, a cuius aequationis reſolutione ſummatio inuentae ſeriei pendeat. Quo autem haec methodus facilius poſſit adhiberi pono $n=-x^2$, eritque ſummanda iſta ſeries $1-\frac{1}{2.2}x^2-\frac{1.1.3}{2.2.4.4}x^4-\frac{1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6.6}x^6-$ etc., huius igitur ſummam pono s. Erit ergo differentiando $\frac{ds}{dx}=-\frac{1}{2}x-\frac{1.1.3}{2.2.4}x^3-\frac{1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6}x^5-$ etc. Iam denuo per x multiplico, ſumoque differentialia poſito dx conſtante, erit $\frac{d.xds}{dx^2}=-1.x-\frac{1.1.3}{2.2}x^3-\frac{1.1.3.3.5}{2.2.4.4}x^5-$ etc. Porro diuido vbique x, contraque per dx multiplico, ſumoque integralia, erit $\int\frac{d.xds}{xdx}=-x-\frac{1.1}{2.2}x^3-\frac{1.1.3.3}{2.2.4.4}x^5-$ etc. Denique iterum per dx multiplico, diuido vero per x^3, et ſumo integralia, erit $\int\frac{1}{x^3}\int\frac{d.xds}{x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2.2}x-\frac{1.1.3}{2.2.4.4}x^3-\frac{1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6.6}x^5-$ etc. Haec vero ſeries eſt ipſa initialis per x diuiſa: eius igitur ſumma eſt $\frac{s}{x}$. Quocirca habemus hanc aequationem $\int\frac{1}{x^3}\int\frac{d.xds}{x}=\frac{s}{x}$, quae ſumtis differentialibus abit in hanc $x^2ds-sxdx=\int\frac{d.xds}{x}$. Differentietur haec denuo prodibit $x^2ddx+xdxds-sdx^2=\frac{d.xds}{x}=ddx+\frac{dxds}{xdx}$. Huius aequationis reſolutio igitur pendet a ſummatione

mationē ſeriei propoſitae, quae cum per rectificationem ellipſis habeatur, aequationis conſtructio quoque dabitur.

§. 8. Cum in iſta aequatione s vbique vnam tenet dimenſionem, reduci ea poterit per methodum meam Tom. III. Comm. inſertam ad aequationem ſimpliciter differentialem, facta ſubſtitutione $s = c^{\int p dx}$, vbi c denotat numerum, cuius log. eſt 1. Hoc poſito erit $ds = c^{\int p dx} p dx$ et $dds = c^{\int p dx}(dp dx + pp dx^2)$, atque aequatio inuenta transformabitur in hanc $x^2 dp + x^2 p^2 dx + p x dx - dx = dp + pp dx + \frac{p dx}{x}$, quae diuiſa per $xx-1$ mutatur in iſtam $dp + pp dx + \frac{p dx}{x} = \frac{dx}{x x - 1}$. Ad hanc ſimpliciorem efficiendam pono $p = \frac{y}{x}$, et proueniet $dy + \frac{yy dx}{x} = \frac{x dx}{xx-1}$. Quae quomodo ſeparari poſſit neque perſpicio, neque conſtructionis conſideratio eo perducit.

§. 9. Quo autem ipſa conſtructio huius aequationis ex praecedentibus deducatur, pono illam axis ſemiſſem AC, quem ante littera a denotaui, aequalem r, quia vt variabilis debet conſiderari; et quartam perimetri ellipſis partem reſpondentem q; erit $-xx = n = \frac{r^2 - b^2}{b^2}$, et $x = \frac{\sqrt{(b^2 - r^2)}}{b}$. Porro erit $q = es$, eſt vero $s = c^{\int p dx} = c^{\int \frac{y dx}{x}}$, quocirca habebitur $q = ec^{\int \frac{y dx}{x}}$, et $lq - le = \int \frac{y dx}{x}$, adeoque $y = \frac{x dq}{q dx} = \frac{(r^2 - b^2) dq}{q r dr}$. Ne autem, quando r maior eſt quam b, irrationalia proueniant, reſtituo loco xx valorem $-n$, erit $\frac{dx}{x} = \frac{dn}{2n}$, et $\frac{x dx}{xx-1} = \frac{dn}{2(n+1)}$. His ſubſtitutis habebitur iſta aequatio

$2\,dy + \frac{y^2 dn}{n} = \frac{dn}{n+1}$, quae conſtruetur ſumendis $n = \frac{r^2 - b^2}{b^2}$ et $y = \frac{(r^2-b^2)\,dy}{qr\,dr}$, ſeu iam inuento n, $y = \frac{2n\,dq}{q\,dn}$. Hinc
Fig. 2. ſequens naſcitur conſtructio: deſcripto quadrante elliptico BCA, cuius centrum in C et ſemi-axis BC conſtans eſt puta $= 1$, pono hic 1 loco b, quo facilius homogeneitas poſſit ſeruari. Erit ergo ſemi-axis $AC = r$, ex A erigatur normalis $AD =$ arcui elliptico AB, erit punctum B in curua aliqua BD, cuius conſtructio hoc modo eſt in promtu. In ea igitur erit $AD = q$. Sit F huius ellipſis focus, erit $CF = V(r^2 - 1)$ et ad BF ducatur normalis FP, erit $EP = r^2 - 1 = n$. Notetur hic, quando ſit $AC < BC$ et focus F in BC incidit, valorem n fieri negatiuum, et ex altera parte puncti C verſus B accipi oportere. Deinceps ducatur tangens DT curuae BD in D, erit $AT = \frac{qdr}{dq}$, et iuncta AP, ex T ducatur recta TG normaliter ſecans AP, ſi opus eſt, productam in O et DA productae occurrens in G, erit ob ſimilia triangula PCA et TAG, $AG = \frac{rqdr}{(r^2-1)\,dq}$ Ipſi AG aequalis capiatur CH et ſumta $CI = CB = 1$, ad ductam HI erigatur perpendicularis IK erit $CK = \frac{(r^2-1)\,dq}{rqdr} = y$. Huic CK fiat aequalis PM, eritque M in curua quaeſita BM, huius enim curuae haec eſt proprietas, vt, dictis CP, n et PM, y, ſit $2\,dy + \frac{y^2 dn}{n} = \frac{dn}{n+1}$.

DE

DE SOLVTIONE PROBLEMATVM DIOPHANTAEORVM PER NVMEROS INTEGROS.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

QVoties in problematis Diophantaeis ſoluendis peruenitur ad formulam, in qua plus vna indeterminata non ineſt, maxime requiruntur numeri integri, qui loco indeterminatae poſiti quaeſito ſatisfaciant. Hoc vero quando fieri non poteſt, numeris fractis acquieſcere oportet. Obſeruatum autem eſt, ſi in illa formula indeterminatae maxima dimenſio fuerit quadratum et ipſa formula debeat eſſe numerus quadratus, plerumque infinitos numeros integros problema ſoluere, qui inter ſe certa lege cohaereant, et ſeriem quandam conſtituant. Sed ſi formula vel debeat eſſe cubus aliaue altior potentia, vel ſi indeterminata plures duabus habeat dimenſiones, plus effici non poteſt, quam vt ſaltem numeri fracti eruantur.

§. 2. Ita autem huiusmodi problematum omnium ratio eſt comparata, vt vnum numerum ſatisfacientem diuinatione inueniri oporteat, ex quo deinceps infiniti alii reperiri queant. Neque enim ad primum detegendum regula poteſt tradi, cum caſu poſſint occurrere, qui

qui omnino nullam ſolutionem admittunt, cuiusmodi eſt $3x^2+2$, quae formula nunquam fieri poteſt quadratum. Quamobrem in ſequentibus ſemper ponemus, vnicum tantum caſum eſſe cognitum, quo conditioni problematis ſatisfiat, atque regulam dabimus, qua ex illo innumerabiles alii elici poſſint.

§. 3. Propoſita igitur ſit haec formula ax^2+bx+c, quae debeat eſſe numerus quadratus. Sintque a, b et c numeri integri, et requirantur quoque numeri integri loco x ſubſtituendi. Datus autem ſit numerus n, qui loco x poſitus reddat formulam ax^2+bx+c quadratum. Erit ergo an^2+bn+c numerus quadratus, cuius radix ſit m. Iam ad alium numerum ſatisfacientem ex hoc dato n inueniendum, pono eum eſſe $\alpha n+\beta+\gamma\sqrt{(an^2+bn+c)}$, huncque valorem loco x ſubſtitutum reddere ax^2+bx+c quadratum, cuius radix ſit $\delta n+\varepsilon+\zeta\sqrt{(an^2+bn+c)}$. Perſpicuum enim eſt illum numerum loco x ſubſtituendum fore rationalem ob an^2+bn+c quadratum, numeros autem integros hoc modo reperiri ſi modo ſit n numerus integer, mox apparebit.

§. 4. Subſtituatur igitur $\alpha n+\beta+\gamma\sqrt{(\alpha n^2+bn+c)}$ loco x in ax^2+bx+c, hocque facto prodibit

$$\left.\begin{array}{l} aa^2n^2+2aa\beta n+a\beta^2+2aa\gamma n \\ a^2\gamma^2n^2+ab\gamma^2n+ac\gamma^2+2a\beta\gamma \\ \qquad +ban \quad +b\beta \quad +b\gamma \\ \qquad\qquad +c \end{array}\right\}\sqrt{(an^2+bn+c)}$$

Sed

Sed quia huius radicem quadricem ponimus $\delta n + \varepsilon + \zeta \sqrt{(an^2 + bn + c)}$, erit hinc etiam $ax^2 + bx + c$ aequalis sequenti quantitati.

$$\delta^2 n^2 + 2\delta\varepsilon n + \varepsilon^2 + 2\delta\zeta n\sqrt{(an^2 + bn + c)}$$
$$a\zeta^2 n^2 + b\zeta^2 n + c\zeta^2 + 2\varepsilon\zeta$$

His duabus formis inter se aequatis, habebuntur sequentes aequationes.

$$a\alpha^2 + a^2\gamma^2 = \delta^2 + a\zeta^2,\ 2a\alpha\beta + ab\gamma^2 + b\alpha = 2\delta\varepsilon + b\zeta^2,$$
$$a\beta^2 + ac\gamma^2 + b\beta + c = \varepsilon^2 + c\zeta^2,\ 2a\alpha\gamma = 2\delta\zeta$$
$$2a\beta\gamma + b\gamma = 2\varepsilon\zeta.$$

Ex quibus elicitur $\delta = \frac{\alpha+\gamma}{\zeta}$ et $\varepsilon = \frac{2a\beta\gamma + b\gamma}{2\zeta}$, et valor ipsius δ in prima aequatione substitutus dat, $a^2\zeta^2 + a\gamma^2\zeta^2 = a\alpha^2\gamma^2 + \zeta^4$, quae in duas resoluitur $\zeta^2 = \alpha^2$, et $\zeta^2 = a\gamma^2$. Harum autem posterior, nisi sit a quadratum, locum habere nequit. Habebimus ergo $\zeta = \alpha$, et secunda aequatio factis substitutionibus hisce similiter in has resoluetur $a\gamma^2 = \alpha^2$, et $\beta = \frac{b(\alpha-1)}{2a}$, quarum iterum posterior tantum locum habet. His inuentis tertia tandem aequatio dabit $\alpha = \sqrt{(a\gamma^2 + 1)}$: inueniri igitur debet valor pro γ, quo $a\gamma^2 + 1$ fiat quadratum.

§. 5. Sit p iste numerus, qui loco γ substitutus reddat $a\gamma^2 + 1$ quadratum, et huius radix ponatur q; ita vt sit $q = \sqrt{(ap^2 + 1)}$, erit $\alpha = q, \gamma = p, \beta = \frac{b(q-1)}{2a}$, $\delta = ap$, $\varepsilon = \frac{bp}{2}$ et $\zeta = q$. Ex his colligitur sequens Theorema:

Si $ax^2 + bx + c$ est quadratum casu quo $x = n$, erit quoque quadratum casu, quo $x = qn + \frac{bq-b}{2a} + p\sqrt{(an^2 + bn + c)}$; eiusque quadrati radix erit $apn + \frac{bp}{2} + q\sqrt{(an^2 + bn + c)}$.

Si ergo modo bp per 2 diuidi poteſt, radix quadrati erit numerus integer, et propterea quoque valor ipſius x erit integer, ſeu $bq-b$ diuidi poterit per $2a$.

§. 6. Quemadmodum autem ex n valore ipſius x dato inuentus eſt alius $qn+\frac{bq-b}{2a}+pm$ poſito m loco $\sqrt{(an^2+bn+c)}$; ita hac quantitate tanquam n tractata, quo caſu loco m ſumi debebit $apn+\frac{bp}{2}+qm$, eruetur denuo alius valor, qui loco x ſubſtitutus quaeſito ſatisfacit, ſcilicet hic: $2ap^2n+bp^2+2pqm$, $+n$ quadrati vero hinc orti radix erit $2apq+bpq+2ap^2m$. $+\quad +m$ Conſideretur iam illa quantitas vt n et haec vt m habebitur quartus valor ipſius x ſatisfaciens hic:

$$4ap^2qn+2bp^2q+4ap^3m$$
$$+qn+\frac{b(q-1)}{2a}+3pm$$

Et radix quadrati reſpondentis erit,

$$4a^2p^3n+2bp^3+4ap^2qm$$
$$+3apn+\frac{3pb}{2}+qm$$

§. 7. Valores ipſius x ſatisfacientes, vna cum radicibus quadratorum reſpondentium ergo ita ſe habebunt vt ſequitur:

Valo-

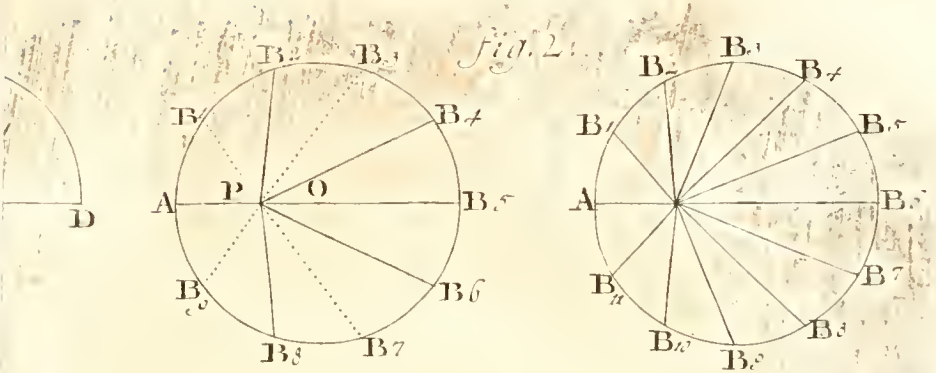


fig. 2.

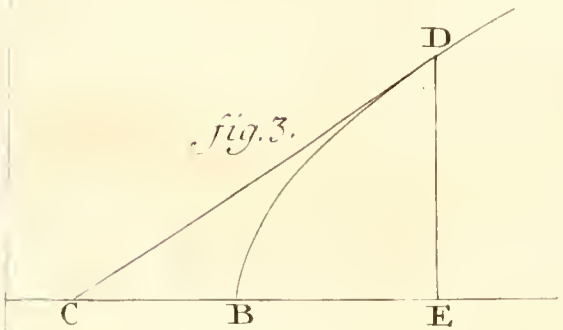


fig. 3.

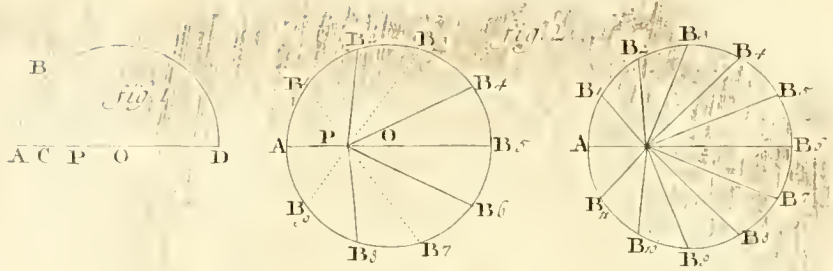


fig. 1.
B
A C P O D
fig. 2.
B1 B2
B3 B4
A P O B5
B6
B7 B8
B1 B2
B3 B4
B5
A B6
B7
B8 B9
B10 B11

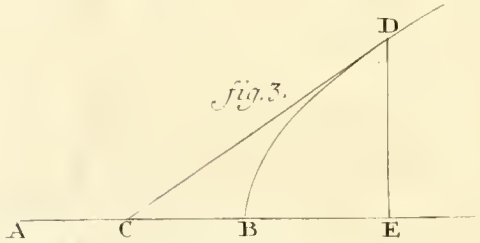


fig. 3.
D
A C B E

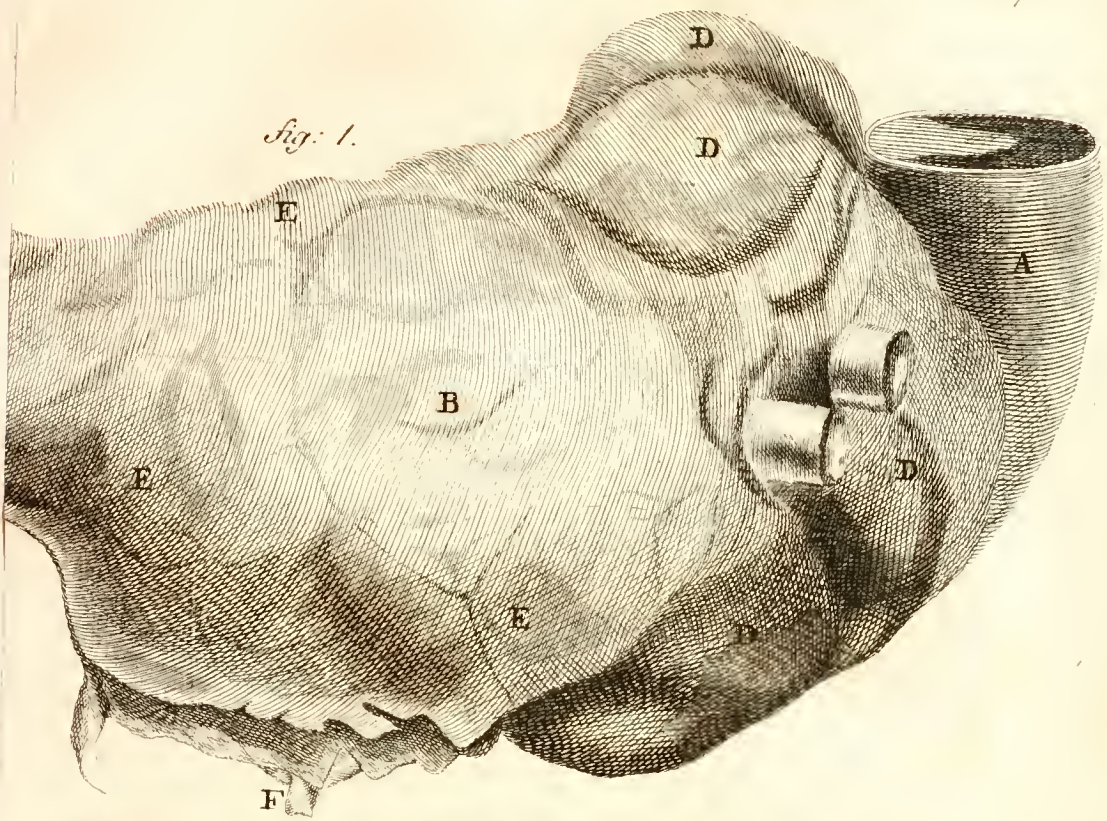


Fig. 1.

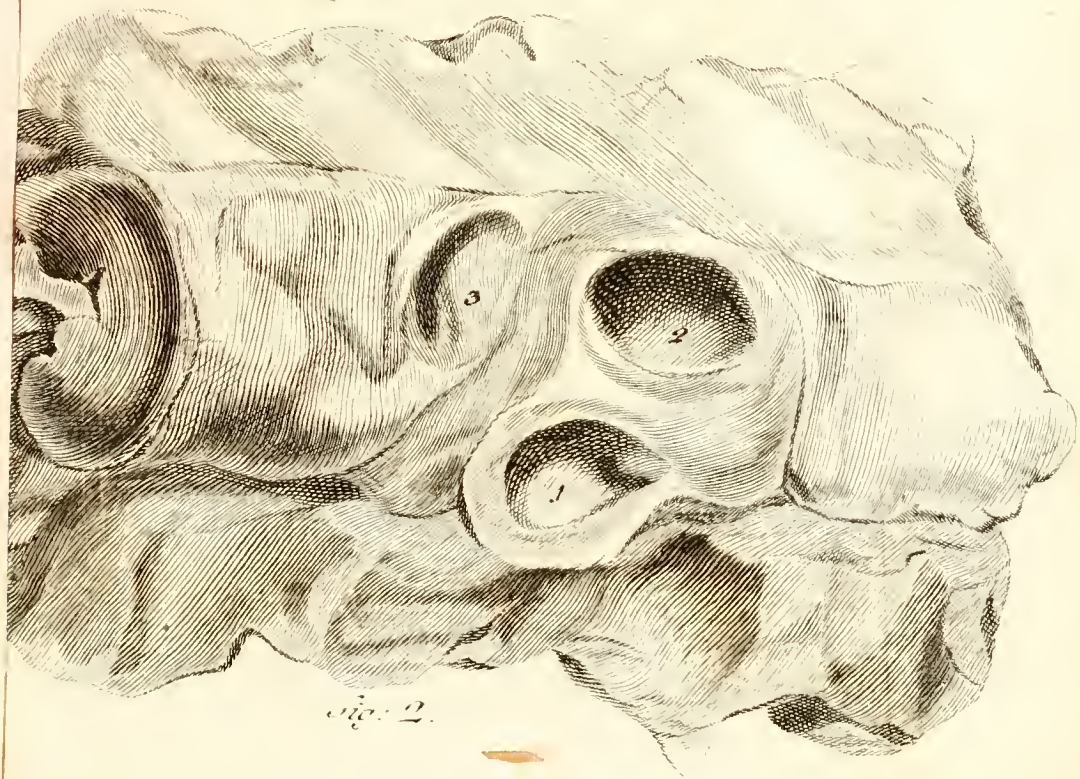


Fig. 2.

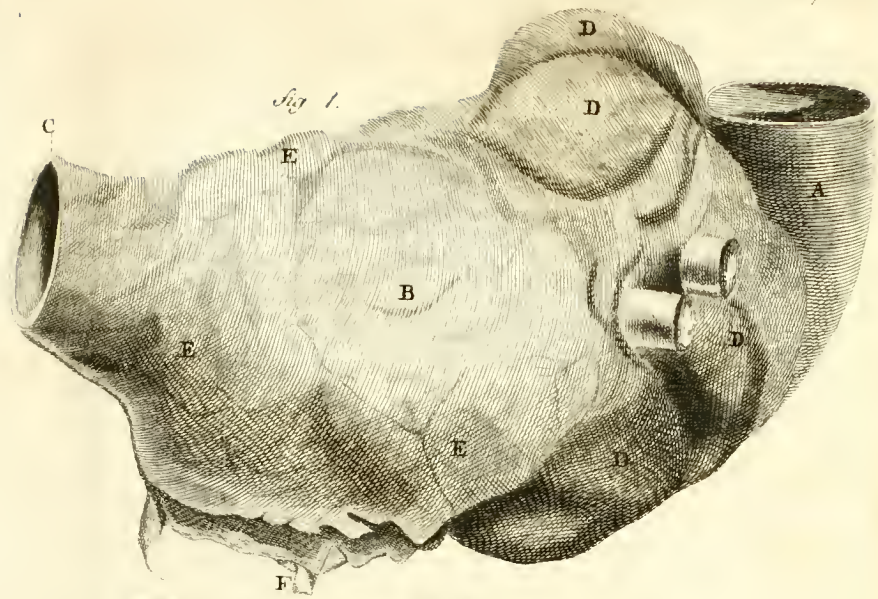


Fig 1.

Fig 2.

Valores ipſius x	Valores $\sqrt{(ax^2+bx+c)}$
I. n	m
II. $qn+pm+\frac{b(q-1)}{2a}$	$apn+qm+\frac{bp}{2}$
III. $2q^2n+2pqm+\frac{b(q^2-1)}{a}$ $-n$	$2apqn+2q^2m+bpq$ $-m$
IV. $4q^3n+4pq^2m+\frac{b(4q^3-3q-1)}{2a}$ $-3qn-pm$	$4apq^2n+4q^3m+2bpq^2$ $-apn-3qm-\frac{bp}{2}$
V. $8q^4n+8pq^3m+\frac{4bq^2(q^2-1)}{a}$ $-8q^2n-4pqm$ $+n$	$8apq^3n+8q^4m+4bpq^3$ $-4apqn-8q^2m-2bpq$ $+m$
etc. etc.	etc.
Huius progreſſionis haec eſt lex.	Huius progreſſionis haec eſt lex.
term. quicunque A	E
hunc ſequens B	F
$2qB-A+\frac{b(q-1)}{a}$	$2qF-E$

Hae igitur progreſſiones, quousque libuerit exiguo labore continuantur.

§. 8. Perſpicitur ex his formis alternos adminimum terminos efficere ax^2+bx+c numerum quadratum integrum; atque omnia omnino quadrata fieri numeros integros ſi fuerit bp numerus par. Omnes autem ipſius x valores erunt numeri integri, ſi $b(q-1)$ diuidi poterit per $2a$, ſin vero hoc non fuerit, ſaltem alterni ipſius x valores erunt numeri integri, nam $qq-1$ i. e. ap^2 ſemper diuidi poterit per a, ſi quidem, vt ponimus p et q ſint numeri integri. Praeterea

terea notandum est in terminis istis etiam m negatiue accipi posse, qua ratione numerus solutionum quandoque duplicatur.

§. 9. Intelligitur etiam, si a sit numerus quadratus, solutionem in numeris integris exhiberi non posse, nisi forte ax^2+bx+c vel ipsum est quadratum vel numero quadrato fieri potest aequale. Hanc ob rem excluſimus supra eos casus, quibus a erat quadratum, quia hic tantum de numeris integris problema soluentibus praecepta tradere instituimus. Nam si a est quadratum; nullus numerus integer potest exhiberi, qui loco p positus efficiat ap^2+1 quadratum, praeter 0. Hoc vero casu omnes valores ipsius x manent n, nullusque ergo alius, nisi is qui diuinatione est inuentus, eruitur.

§. 10. Quoties autem a non est numerus quadratus, semper numerus integer potest assignari, qui loco p positus efficiat ap^2+1 quadratum. Quamobrem his casibus, si unicum casum elicuerimus, quo ax^2+bx+c fit quadratum; simul quoque casus infinitos exhibere poterimus, qui ax^2+bx+c in quadratum transmutent. Proposita igitur formula ax^2+bx+c hoc erit agendum: primo coniectura detegi debebit valor ipsius x in integris, qui reddat ax^2+bx+c quadratum. Deinde etiam quaeri debet valor ipsius p, quo ap^2+1 etiam fiat quadratum. Hisque inuentis ope progressionum inuentarum casus infiniti innotescent.

§. 11.

§. 11. Si c eſt quadratum, nempe $= dd$; ſtatim apparet caſus, quo $ax^2 + bx + d^2$ eſt quadratum, is enim eſt ſi $x = o$. Ponamus ergo $n = o$, eritque $m = d$, et valores ipſius x ſatisfacientes conſtituent hanc ſeriem: o, $dp + \frac{b(q-1)}{2a}$, $2dpq + \frac{b(q^2-1)}{a}$ - - - - - - - - - A, B, $2q$B $-$ A $+ \frac{b(q-1)}{a}$. Quadratorum autem, quae hinc generantur, radices erunt: d, $dq + \frac{bq}{2}$, $d(2q^2-1) + bpq$, - - - - - - - - - - E, F, $2q$F $-$ E. Harum ſerierum lex, vt et priorum (§. 7.) perſpicua eſt, ſunt enim omnes recurrentes, ſeu quiuis terminus ex duabus praecedentibus eſt compoſitus.

§. 12. Si $b = o$ et $d = 1$, vt habeatur haec forma $ax^2 + 1$, ad quam, vt ex praecedentibus apparet, generalis $ax^2 + bx + c$ maximam partem reducitur. Huius ergo valores ipſius x respondentes in hac ſerie progrediuntur: o, p, $2pq$, $4pq^2 - p$, - - - - - A, B, $2q$B $-$ A, Radices vero quadratorum productorum erunt ſequentes; 1, q, $2q^2 - 1$, $4q^3 - 3q$, - - - - - ſit quadratum conſtat, huiusmodi numeri infiniti habe- E, F, $2q$F $-$ E. Si ergo vnicus caſus p, quo $ap^2 + 1$ ſit quadratum conſtat, huiusmodi numeri infiniti habebuntur, qui in tractatione generalis formulae $ax^2 + bx + c$ loco p et q collocari poſſunt.

§. 13. Quo autem haec methodus ad quosuis caſus poſſit accommodari, videamus primo, quos numeros pro quolibet ipſius a valore literis p et q tribui oporteat. Debet autem p talis eſſe numerus qui $ap^2 + 1$ reddat quadratum, huiusque radix erit q. Perſpicuum

quidem est, si vnicus pro p habeatur valor idoneus, simul quoque infinitos haberi: attamen hic vnicum dumtaxat eumque minimum praeter 0 adhiberi conuenit. Nam reliqui sequentes, qui sunt $2pq, 4pq^2-p$, etc. solutionum numerum non multiplicant, cum valores tantum sequentes ipsius x in §. 7. praebeant. Minimus autem ipsius p valor dabit omnes numeros ipsius x; satisfacientes, quod maiores non faciunt.

§. 14. Intelligatur igitur, quod si fuerit $a = e^2 - 1$, minimum ipsius p valorem fore 1, ipsiusque q, e. Deinde si fuerit $a = e^2 + 1$, tum esse $p = 2e$, et $q = 2e^2 + 1$. Atque si sit $a = e^2 \pm 2$, erit $p = e$, et $q = e^2 \pm 1$. Huiusmodi casus infiniti alii possunt definiri, quorum ingens numerus hoc continetur theoremate: si sit $a = \alpha^2 e^{2b} \pm 2\alpha e^{b-1}$, erit $p = e$, et $q = \alpha e^{b+1} \pm 1$ vbi pro α etiam numeri fracti accipi possunt, dummodo illi per e^{b-1} multiplicati in integros transmutentur. Simili modo etiam si sit $a = (\alpha e^b + \mathfrak{C} e^\mu)^2 + 2\alpha e^{b-1} + 2\mathfrak{C} e^{\mu-1}$, erit $p = e$, et $q = \alpha e^{b+1} + \mathfrak{C} e^{\mu+1} + 1$. Atque etiam si sit $a = \frac{1}{4}\alpha^2 k^2 e^{2b} \pm \alpha e^{b-1}$, erit $p = ke$, et $q = \frac{1}{2}\alpha k^2 e^{b+1} \pm 1$.

§. 15. Quoties igitur a est numerus, qui in istis formulis contineatur, statim apparet valor ipsius p et q. At si a huiusmodi fuerit numerus, qui nullo modo ad illas formulas potest reduci, peculiaris ad inuenienda p et q adhibenda est methodus, qua olim iam vsi sunt *Pellius* et *Fermatius*. Haecque methodus est vniuersalis, et aeque succedit, quemcunque numerum denotet a. Praeterea etiam ideo hic potissimum

mum eſt commendanda, quod minimum ipſius p valorem, qui hoc loco requiritur, exhibeat.

§. 19. Methodus haec extat deſcripta in operibus *Walliſii*, et hanc ob rem eam hic fuſius non expono. Operandi tamen modum in vnico exemplo oſtendiſſe iuuabit, cuius inſpectio ad quaeque alia ſoluenda perducet. Oporteat nimirum determinari minimum ipſius p valorem, quo $31p^2+1$ fit quadratum. Ad hoc efficiendum ſequens inſtituitur calculus.

$\sqrt{(31p^2+1)}=q$. Ergo $q>5p$, ponatur itaque $q=5p+a$

$6p^2+1=10ap+a^2$, $p=\frac{5a+\sqrt{(31a^2-6)}}{6}$, $p=a+b$

$5a^2=2ab+6b^2+1$, $a=\frac{b+\sqrt{(31b^2+5)}}{5}$, $a=b+c$

$3b^2=8bc+5c^2-1$, $b=\frac{4c+\sqrt{(31c^2-3)}}{3}$, $b=3c+d$

$2c^2=10cd+3d^2+1$, $c=\frac{5d+\sqrt{(31d^2+2)}}{2}$, $c=5d+e$

$3d^2=10de+2e^2-1$, $d=\frac{5e+\sqrt{(31e^2-3)}}{3}$, $d=3e+f$

$5e^2=8ef+3f^2+1$, $e=\frac{4f+\sqrt{(31f^2+5)}}{5}$, $e=2f-g$

$f^2=12fg-5g^2+1$, $f=6g+\sqrt{(31g^2+1)}$

Tamdiu ſcilicet hae operationes continuantur, quoad in media columna perueniatur ad $\sqrt{(31g^2+1)}$ eiusdem formae, quam habuit propoſita $\sqrt{(31p^2+1)}$. Perſpicuum iam eſt ſi ponatur $g=0$ fore $f=1$. Hincque retrogrediendo habebitur: $e=2$, $d=7$, $c=37$, $b=118$, $a=155$, $p=273$, atque $q=1520$.

§. 17. Quo autem non tanto opus ſit labore ad valores ipſarum p et q inueniendos pro dato numero a, ſequentem tabulam annexere viſum eſt, in qua pro ſingulis valoribus ipſius a exhibentur minimi numeri, qui loco p ſubſtituti reddant ap^2+1 quadratum.

a.	*p.*	*q.*	*a.*	*p.*	*q.*
2.	2.	3.	37.	12.	73
3.	1.	2.	38.	6.	37
5.	4.	9.	39.	4.	25
6.	2.	5.	40.	3.	19
7.	3.	8.	41.	320.	2049
8.	1.	3.	42.	2.	13
10.	6.	19.	43.	531.	3482
11.	3.	10.	44.	30.	199
12.	2.	7.	45.	24.	161
13.	180.	649.	46.	3588.	24335
14.	4.	15.	47.	7.	48
15.	1.	4.	48.	1.	7
17.	8.	33.	50.	14.	99
18.	4.	17.	51.	7.	50
19.	39.	170.	52.	90.	649
20.	2.	9.	53.	9100.	66249
21.	12.	55.	54.	66.	485
22.	42.	197.	55.	12.	89
23.	5.	24.	56.	2.	15
24.	1.	5.	57.	20.	151
26.	10.	51.	58.	2574.	19603
27.	5.	26.	59.	69.	530
28.	24.	127.	60.	4.	31
29.	1820.	9801.	61.	226153980.	17663190 49
30.	2.	11.	62.	8.	63
31.	273.	1520.	63.	1.	8
32.	3.	17.	65.	16.	129
33.	4.	23.	66.	8.	65
34.	6.	35.	67.	5967.	4884-
35.	1	6.	68.	4.	33

§. 18. Hic ſtatim occurrit modus perfacilis extrahendi quam proxime radicem quadratam ex numero quocunque non quadrato a. Quia enim eſt $ap^2+1=q^2$ erit $\sqrt{a}=\frac{\sqrt{(q^2-1)}}{p}$, et, ſi q ſit numerus valde magnus, erit $\sqrt{a}=\frac{q}{p}$ quam proxime. Sed loco p poſſunt poni ſinguli termini ſeriei $0, p, 2pq, 4pq^2-p,$ ----- A, B, $2q$B$-$A, et loco q ſinguli termini reſpondentes ſeriei huius $1, q, 2q^2-1, 4q^3-3q$ ----- E, F, $2q$F$-$E (§. 12.). Sit huius ſeriei terminus indicis $i=$Q, et illius terminus, cuius index etiam i eſt $=$P, erit $\sqrt{a}=\frac{Q}{P}$. Quia vero, quo magis continuantur hae ſeries, maiores quoque fiunt termini Q; eo propior reperietur $\sqrt{a}$ ſumendis terminis ſerierum a primo longius diſtantibus. Sit exempli gratia $a=6$, erit $p=2$ et $q=5$, ſeriesque ſibi inuicem ſubſcribantur vt ſequitur, poſteriore loco ſuperiore poſita:

$\frac{1, 5, 49, 485, 4801, 47525, 470449, 4656965,}{0, 2, 20, 198, 1960, 19402, 192060, 1901198,}$ etc. etc.

Sumtis igitur vltimis terminis, erit $\frac{4656965}{1901198}$ ita propinquum radici quadratae ex 6, vt plus eam non excedat, quam hac fractione $\frac{1}{2.(1901198)^2\sqrt{6}}$. Simili modo patet radicem quadratam ex 61 fore proxime aequalem $\frac{17663190049}{2261539980}$. Quae quidem radix vera aliquantulum maior eſt, ſed exceſſus eſt minor quam $\frac{1}{2(2261539980)^2\sqrt{61}}$.

§. 19. Quaerantur omnes numeri triangulares, qui ſint ſimul quadrati; debebit $\frac{x^2+x}{2}$ eſſe quadratum. Quadratum igitur quoque erit $2x^2+2x$, ex quo fit, collatione cum formula ax^2+bx+d^2 (§. 11.) inſtituta $a=2, b=2, d=0$. Sed quia eſt $a=2$, erit ex ta-

bula ſuperiore $p=2$ et $q=3$. Vnde loco x ſubſtitui debebunt ſequentes valores 0, 1, 8, 49, 288, 1681, 9800, etc. quo $\frac{x^2+x}{2}$ fiat quadratum. Quadratorum autem hinc ortorum radices tenebunt hanc ſeriem, 0, 1, 6, 35, 204, 1189, 6930, etc. Vel quadrata, quorum radices continentur in hac ſerie, erunt numeri triangulares. Seriei quidem huius poſterioris termini ſiunt duplo maiores, ſi formentur ex ſerie generali d, $dq + \frac{bp}{2}$, $d(2q^2-1)+bpq$ etc. ſed quia hi termini ſunt radices ex $2x^2+2x$, debebunt diuidi per 2, quo habeantur radices ex $\frac{x^2+x}{2}$.

§. 20. Numeri polygonales l laterum exprimuntur hac formula generali $\frac{(l-2)x^2-(l-4)x}{2}$, in qua x denotat radicem numeri polygonalis. Quo ergo huiusmodi numerus polygonalis ſit quadratum, oportet $2(l-2)x^2-2(l-4)x$ eſſe quadratum. Statim autem vnus caſus apparet, quo quaeſito ſatisfit, ſcilicet ſi $x=0$; fit enim ipſa formula $=0$. Quamobrem habebimus $n=0$ et $m=0$; et formula cum generali ax^2+bx+c comparata prodit $a=2(l-2)$ et $b=-2(l-4)$, atque $c=0$. Fiat igitur $2(l-2)p^2+1=q^2$, erunt ipſius x valores, quibus $2(l-2)x^2-2(l-4)x$ ſeu huius pars quarta $\frac{(l-2)x^2-(l-4)x}{2}$ i. e. ipſe numerus polygonalis fit quadratum, ſequentes, 0, $\frac{-(l-4)}{2(l-2)}(q-1)$, $\frac{-(l-4)}{(l-2)}(q^2-1)$ ------ A, B, $2q$B$-$A$-\frac{(l-4)}{l-2}(q-1)$. Qui quidem numeri omnes, ſi $l>4$, ſunt negatiui, attamen affirmatiui habebuntur valores ipſius x ſumto q negatiuo, tum enim alterni termini erunt affirmatiui. Deinde etiam

etiam si inuentus sit numerus negatiuus pro x, qui sit $-k$, poterit numerus affirmatiuus dari, qui eundem numerum polygonalem producat, erit nempe $x = k + \frac{l-4}{l-2}$, sed nisi sit $\frac{l-4}{l-2}$ numerus integer, hi numeri affirmatiui sunt fracti, quos hic excludimus. Hanc ob rem alternis terminis superioris seriei posito $-q$ loco q contenti esse debemus. Radices vero quadratorum $2(l-2)x^2 - 2(l-4)x$ his casibus resultantium tenebunt hanc progressionem, $0, (l-4)p, 2(l-4)pq, \ldots\ldots$ E, F, $2q$F$-$E.

§. 21. Quo autem non alii numeri, nisi affirmatiui et integri reperiantur, alium casum, quo $2(l-2)x^2 - 2(l-4)x$ fit qnadratum, erui oportet, qui erit, si $x = 1$; prodibit enim 4. Hanc ob rem ponatur $n = 1$ et $m = 2$, quo facto habebuntur pro x valores sequentes: $1, q + 2p - \frac{(l-4)}{2(l-2)}(q-1), 2q^2 - 1 + 4pq - \frac{(l-4)}{l-2}(q^2-1), \ldots\ldots$ A, B, $2q$B$-$A$-\frac{(l-4)}{l-2}(q-1)$. Radices autem quadratae ex $\frac{(l-2)x^2-(l-4)x}{2}$ progredientur in hac serie, $1, \frac{lp}{2} + q, lpq + 2q^2 - 1, \ldots\ldots$ E, F, $2q$F$-$E. Quo autem omnes ipsius x valores sint numeri integri, non quidem loco q minimum valorem, sed eum, qui reddat $\frac{l-4}{2(l-2)}(q-1)$ numerum integrum seligi conuenit, id quod semper fieri poterit. Vt si quaerantur numeri pentagonales quadrati, erit $l = 5$, et $a = 6$, atque q erit numerus ex hac serie $1, 5, 49$, etc. et ipsius p valores respondentes erunt $0, 2, 20$, etc. Quo igitur $\frac{(l-4)}{2(l-2)}(q-1) = \frac{1}{6}(q-1)$ sit numerus integer, sumi debet $q = 49$, et $p = 20$. Radices ergo numerorum pen-

tagonalium, qui sunt quadrati, erunt, 1, 81, 7921, ------A, B, 98 B−A−16, qui numeri etiam in superiore serie (§. 20.) continentur, si accipiatur $q = -5$, erunt enim termini alterni affirmatiui. Horum autem numerorum pentagonalium radices quadratae erunt 1, 99, 9701, -----E, F, 98 F−E.

§. 22. Quia est $2(l-2)p^2 + 1 = q^2$, manifestum est ex praecedentibus, si fuerit $2l-4$ quadratum, nullum numerum integrum loco p substitui posse. Hanc ob rem vel omnes numeri polygonales erunt quadrati, vel tantum nonnulli. Prius euenit, si $l = 4$; nam omnes numeri tetragonales sunt simul quadrati. Posterius vero si sit $2l-4 = 16$ seu 36, seu 64 etc. his enim casibus alii non erunt quadrati, nisi 0 et 1. Si $2l-4 = 16$, erit $l = 10$, ideoque numeri polygonales erunt decagonales, quorum forma est $4x^2 - 3x$. Nullusque numerus decagonalis est quadratus praeter 0 et 1 in integris.

DE

DE QVADRATVRA CVRVARVM ALGEBRAICARVM, QVARVM AEQVATIONES LOCALES COORDINATAS SIBI INVICEM PERMIXTAS INVOLVVNT.

AVCTORE

Iacobo Hermanno.

VIr Celeberr. *Ioh. Craige* inter plura, quae ad scientiae profectum conducunt, perelegantem methodum tradidit, in Tractatu suo de *Calculo Fluentium* 1713. Londini impresso, quadrandi Figuras curuilineas, quarum aequationes locales sunt formae sequentis $y^m = ax^n + bx^py^q + b2x^ry^s + b3x^ty^v +$ etc. vbi indeterminata y ordinatas curuae, x abscissas, $a, b, b2, b3$, etc. coefficientes, et m, n, p, q, r, s, etc. exponentes significant.

Assumit enim aream quaesitam aequalem seriei cuidam indefinitae huius formae, $\int y\,dx = Axy + Bx^fy^g + Cx^by^i + Dx^ky^l +$ etc. in qua, tum coefficientes A, B, C, D, etc. tum etiam exponentes f, g, h, i, etc. eliciendi sunt ex aequatione curuae proposita. Hunc in finem geminum valorem elicit elementi dy, in x, y, dx et constantibus, vnum ex serie modo adducta, sed differentiata, alterum ex aequatione curuae itidem differentiata; duas has diuersas aestimationes elementi dy, deinceps aequat, indeque nouam aequationem terminis finitis expressam deriuat, quam Ipse *resultantem* vocat,

dico *terminis finitis*; nam aequatio resultans semper diuisibilis est per dx, et singuli termini post hanc diuisionem emergentes fiunt finiti, eorum tamen numerus est indefinitus. Ex comparatione exponentium terminorum, et annihilatione coefficientium aequationis resultantis, deinceps elicit quantitatem exponentium et coefficientium seriei indefinitae aream curuae quaesitam definientis, quae subinde abrumpens est, cum Curua quadrabilis est, saepius vero in infinitum excurrit. In sectione IV. huius Libri plura exempla curuarum absolute quadrabilium affert, quibus serierum suarum vsum in casibus particularibus illustrat.

Cum primum elegantem hanc methodum expositam vidissem in laudato opere, curiositas animum meum incesserat indagandi, annon eiusmodi curuarum Quadraturae, ad quadraturas aliarum curuarum reuocari possent, quarum areae darentur per quantitates vnicam tantum indeterminatam inuoluentes; inueni rem satis facile succedere in curuis Trinomialibus, sed in Quadrinomialibus, aut altioribus, certam inter exponentes terminorum relationem, quod idem quoque in *Craigiana* methodo accidit, praesupponi debere.

I. Ad id in curuis Trinomialibus ostendendum, diuersae suppetunt viae; nam primo si ponamus $y = M^{\alpha} N^{\beta}$, et $x = M^{\gamma} N^{\delta}$, vbi M et N sint nouae indeterminatae, succedentes in locum indeterminatarum y et x, et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sunt exponentes indeterminati valoris. Hae aequationes vero praebent $N = x^{\frac{\alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma}} y^{\frac{-\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma}}$, et

$M =$

$M = x^{\frac{-\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma}} y^{\frac{\delta}{\alpha\delta-\beta\gamma}}$; quod si praeterea statuamus $N = a + bM$, atque in hac aestimationes modo exhibitas indeterminatarum M et N sufficiantur, proueniet $x^{\frac{\alpha}{\alpha\delta-\beta\gamma}} y^{\frac{-\gamma}{\alpha\delta-\beta\gamma}} = a + bx^{\frac{-\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma}} y^{\frac{\delta}{\alpha\delta-\beta\gamma}}$, ductaque in $x^{\frac{-\alpha}{\alpha\delta-\beta\gamma}}$ nascitur $y^{\frac{-\gamma}{\alpha\delta-\beta\gamma}} = a x^{\frac{-\alpha}{\alpha\delta-\beta\gamma}} + b x^{\frac{-\alpha-\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma}} y^{\frac{\delta}{\alpha\delta-\beta\gamma}}$ (A).

II. Habemus ergo aequationem trinomialem A, ad quam omnes reliquae quae occurrere possunt, facile reducentur. Sit ergo generalis aequatio curuarum trinomialium $y^m = ax^n + bx^e y^r$ (B); et A aequatio ad hanc reducetur, ponendo $\alpha = \frac{n}{em+nr-mn}$, $\beta = \frac{e-n}{em+rn-mn}$, $\gamma = \frac{m}{em+nr-mn}$, $\delta = \frac{-r}{em+nr-mn}$.

III. Pro obtinenda area aequationis B, aequationes assumtae $y = M^\alpha N^\beta$, et $x = M^\gamma N^\delta$, praebent $y\,dx = (\gamma N\,dM + \delta M\,dN) M^{\alpha+\gamma-1} N^{\beta+\delta-1}$. Quod si nunc ad abbreuiandum, fiant $\eta = \alpha + \gamma$, $\theta = \beta + \delta$, $\lambda = \gamma + \delta$, et pro N et dN scribantur in parenthesi $a + bM$, et $b\,dM$, inuenietur $y\,dx = (\gamma a\,dM + \lambda b M\,dM) M^{\eta-1} N^{\theta-1}$. Sit porro l numerus quicunque affirmatiuus, et $\varkappa$ quicunque fractus, atque $\eta = l + \varkappa$. Factisque deinceps $A = \frac{\lambda}{\eta+\theta}$, $B = \frac{(\gamma-\eta A)a}{\eta+\theta-1,b}$, $C = \frac{(1-\eta)Bb}{\eta+\theta-2,b}$, $D = \frac{(2-\eta)Ca}{\eta+\theta-3,b}$, etc. atque $Q = \int M^\varkappa N^{\theta-1} dM$ nec non $T = A M^\eta + B M^{\eta-1} + C M^{\eta-2} +$ etc. $+ \Gamma M^{\varkappa+1}$. Inuenietur primo area quaesita $1. \int y\,dx = N^\theta T - (\varkappa + 1)\Gamma a Q$.

Sciendum autem in hac prima Quadraturae formula, fore $\int y\,dx = N^\theta T$ simpliciter, si $\varkappa$ sit $= 0$, vel $\eta = 1$,

$\eta = 1$, seriemque T continuandam esse vsque ad terminum illum inclusiue in quo exponens indeterminatae M est $= 0$.

2. Si sint π numerus integer affirmatiuus et p fractus, fueritque $\theta = \pi + p$, ac fiant $E = \frac{\lambda}{\eta+\theta}$, $F = \frac{(\vartheta E - \delta)a}{\eta+\theta-1}$, $G = \frac{(\theta-1)Fa}{\eta+\theta-2}$, $H = \frac{(\theta-2)Ga}{\eta+\theta-3}$, etc. $R = \int M^{\eta-1} N^{\rho} dM$, et $V = E N^{\vartheta} + F N^{\vartheta-1} + G N^{\vartheta-2} + \text{etc.} + \Delta N^{\rho+1}$. Inuenietur 2. $\int y\,dx = M^{\eta} V + (\varsigma + 1)\Delta a R$.

Quare etiam nunc si ς sit $= 0$, fiet $\int y\,dx = M^{\eta} V$, et series V est protendenda vsque ad terminum in quo exponens indeterminatae N est $= 0$.

IV. Quae §. §. I, II. elicuimus breuius potuissent inueniri hunc in modum: aequatio proposita $y^m = ax^n + bx^e y^r$ per diuisionem cum x^n reducitur ad $y^m x^{-n} = a + bx^{e-n} y^r$, et si fiant $N = x^{-n} y^m$, et $M = x^{e-n} y^r$, inuenientur $x = M^{\frac{m}{em+nr-mn}} N^{\frac{-r}{em+nr-mn}}$ (§. II.) $= M^{\gamma} N^{\delta}$, et $y = M^{\frac{n}{em+nr-mn}} N^{\frac{e-n}{em+nr-mn}} = M^{\alpha} N^{\beta}$, vt in §. II. Reliqua ergo perficienda restarent pro quadratura obtinenda, vt factum cernitur in §. III.

Ostendendum ergo supereſt, quomodo formulae illae generales, ad exempla particularia applicari debeant.

V. Sit aequatio Curuae quadrandae $y^3 + x^3 = cxy$, applicandoque hanc ad aequationem generalem $y^m = ax^n + bx^e y^r$, habentur $a = -1$, $b = c$, $m = n = 3$, $e = r = 1$, adeoque $\alpha = -1$, $\beta = \frac{2}{3}$, $\gamma = -1$ et $\delta = \frac{1}{3}$. Hinc $\eta (= \alpha + \gamma) = -2$, $\theta (= \beta + \delta) = 1$; $\lambda = -\frac{2}{3}$. Iam vero quia $\eta = -2$ non est affirmatiuus: prima formu-

formula quadraturae nunc inseruire commode non potest; quare altera est adhibenda quia $\theta(=1)$ est numerus integer; inueniuntur vero $E(=\frac{\lambda}{\eta+\theta})=-\frac{2}{3}:-1=\frac{2}{3}$. $F(=\frac{(\theta E-\delta)a}{\eta+\theta-1})=\frac{a}{3}:-2=\frac{-a}{6}=+\frac{1}{6}$ propter $a=-1$, quare $V(=EN+F)=-E+F+cEM=-\frac{1}{2}+\frac{2cM}{3}$, adeoque $\int y\,dx\,(=M^{\eta}V)=\frac{2c}{3M}-\frac{1}{2MM}$ (vel propter $M=\frac{y}{xx}$) $=\frac{2cxx}{3y}-\frac{x^4}{2yy}$ (propter $x^4=cxxy-xy^2$) $=\frac{1}{2}xy+\frac{cxx}{6y}$.

Exemplum 2.

VI. Quaeritur area curuae $y^4+x^4=\frac{x}{c}x^3yy$; sunt ergo hoc casu in aequatione generali $m=n=4$, $e=3$ et $r=2$, $a=-1$, $b=\frac{1}{c}$; adeoque $\alpha=1$, $\beta=-\frac{1}{4}$, $\gamma=1$, $\delta=-\frac{1}{2}$, item $\eta(=\alpha+\gamma)=2$, $\theta(=\beta+\delta)=-\frac{3}{4}$, $\lambda(=\gamma+\delta)=\frac{1}{2}$. Hinc $A(=\frac{\lambda}{\eta+\theta})\frac{2}{5}$, $B(=\frac{(\gamma-\eta\Lambda\ a}{\eta+\theta-1,b})=-\frac{4c}{5}$, $C(=\frac{(1-\eta)Ba}{\eta+\theta-2.b})=+\frac{16cc}{15}$, $D=0$, etc. adeoque $T(=AM^2+BM+C)=\frac{2}{5}MM-\frac{4cM}{5}+\frac{16cc}{15}$ (propter $M=x^{\alpha\delta-\beta\gamma}y^{\alpha\delta-\beta\gamma}=\frac{yy}{x}$) $=(\frac{2}{5}y^4-\frac{4cxyy}{5}+\frac{16}{15}ccxx)\times x^{-2}$, et $N(=a+bM)=(yy-cx)c^{-1}x^{-1}$, ac denique $\int y\,dx\,(=N^{\delta}T)=\frac{c^{\frac{3}{4}}\times(\frac{2}{5}y^4-\frac{4cxyy}{5}+\frac{16}{15}ccxx)}{x^{\frac{11}{4}}\sqrt[4]{(yy-cx)^3}}$ $=\frac{2}{5}xy-\frac{4c}{5}xxy^{-1}+\frac{16}{15}ccx^3y^{-3}$ est area quaesita.

Exemplum 3.

VII. Sit aequatio curuae quadrandae $y^3=gx+bx^3y^{-18}$, essent ergo $m=3$, $n=1$, $e=3$ et $r=-18$;

item $a=g$ et $b=h$; ex quibus reſultarent $\alpha=-\frac{1}{12}$, $\beta=-\frac{1}{6}$, $\gamma=-\frac{1}{4}$, et $\delta=-\frac{3}{2}$, ſed hoc caſu neque $\eta(=\alpha+\gamma)=-\frac{1}{3}$, neque $\theta(=\beta+\delta)=-\frac{5}{3}$, effet numerus integer affirmatiuus, nec tamen inde ſtatim concludi debet curuam non eſſe quadrabilem.

Nam ducendo aequationem in y^{18}, inuenitur $y^{21}=gxy^{18}+hx^3$, et, comparando hanc cum aequatione generali, inueniuntur $m=21$, $n=3$, $e=1$, $r=18$; $a=h$, et $b=g$, $em+nr-mn=12$, adeoque $\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=-\frac{1}{6}$, $\gamma=\frac{7}{4}$, et $\delta=-\frac{3}{2}$, adeoque $\eta(=\alpha+\gamma)=2$, $\theta(=\beta+\delta)=-\frac{5}{3}$; $\lambda(=\gamma+\delta)=\frac{1}{4}$. Inuenientur ergo in formulis primis §. III. $A(=\frac{\lambda}{\eta+\theta})=\frac{3}{4}$, $B(=\frac{\gamma-\eta A)a}{(\eta+\theta-1,b}=\frac{-3b}{4g}$, $C(=\frac{1-\eta,Ba}{\eta+\theta-2,b})=\frac{-9bb}{20gg}$, adeoque $T(=AM^{\eta}+BM^{\eta-1}+CM^{\eta-2})=\frac{3}{4}MM=\frac{3b}{4g}M-\frac{9bb}{20gg}$ (propter $M=x^{\frac{-\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma}}y^{\frac{\delta}{\alpha\delta-\beta\gamma}}=\frac{y^{18}}{xx}$) $=(\frac{3}{4}y^{36}-\frac{3bxxy^{18}}{4g}-\frac{9bbx^4}{20gg})x^{-4}$, item $N(=a+bM)=hxx+gy^{18}:x^2$.

Quare $\int y\,dx(=N^{\theta}T)=\frac{(\frac{3}{4}y^{36}-\frac{3b}{4g}xxy^{18}-\frac{9bb}{20gg}x^4)}{x^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{(hxx+gy^{16})^5}}=$

$\frac{3}{4}xy-\frac{3b}{4g}x^3y^{-17}-\frac{9bb}{20gg}x^5y^{\frac{3}{5}}$; propter $hxx+gy^{18}=\frac{y^{21}}{x}$.

Exemplum 4.

VIII. *Sit* $y^5=p^4x+q^{12}xxy^{-9}$, vel iuxta obſeruationem in praec. exemplo factam, ducendo aequationem in y^9, vt habeatur $y^{14}=q^{12}xx+p^4xy^9$, inuenietur curua quadrabilis eſſe, erunt enim hoc caſu $m=14$, $n=2$, $e=1$ et $r=9$; $a=12$, et $b=p^4$. Inuenientur ergo

ergo $em + nr - mn = 4$, adeoque $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{7}{2}$, et $\delta = \frac{-9}{4}$, $\eta = \frac{8}{2} = 4$, $\theta = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2}$, $\lambda = \frac{5}{4}$, $\eta + \theta = \frac{3}{2}$. Hinc $A(= \frac{\lambda}{\eta+\theta}) = \frac{5}{6}$, $B(= \frac{(\gamma-\eta A)_2 a}{\eta+\theta-1, b}) = \frac{q^{12}}{3p^4}$, $C(= \frac{(1-\eta)Ba}{\eta+\theta-2, b}) = \frac{2q^{24}}{p^8}$, $D(= \frac{(2-\eta)Ca}{\eta+\theta-3, b}) = \frac{+8q^{36}}{3p^{12}}$, $E(= \frac{(3-\eta)Da}{\eta+\theta-4, b}) = \frac{+16q^{48}}{15p^{16}}$, $F = 0$, etc. Item $M(= x^{\frac{-\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma}} y^{\frac{\delta}{\alpha\delta-\beta\gamma}}) = x^{-1}y^9$, et $N(= a + bM) = q^{12} + p^4 x^{-1} y^9$ (propter $y^5 = p^4 x + q^{12} x x y^9$) $= x^{-2} y^{14}$. $T = \frac{5}{6} x^{-4} y^{36} + \frac{4q^{12}}{3p^4} x^{-3} y^{27} + \frac{2q^{24}}{p^8} x^{-2} y^{18} + \frac{8q^{36}}{3p^{12}} x^{-1} y^9 + \frac{16q^{48}}{15p^{16}}$, quare $\int y\,dx (= N^\theta T) = \frac{5}{6} xy + \frac{q^{12}}{3p^4} x x y^{-8} + \frac{2q^{24}}{p^8} x^3 y^{-17} + \frac{8q^{36}}{3p^{12}} x^4 y^{-26} + \frac{16q^{48}}{15p^{16}} x^5 y^{-35}$. prorſus vt habet Cel. *Craige* in Exempl. III. Sect. IV.

Exemplum 5.

IX. Sit $y^{\frac{5}{3}} = ax^{\frac{1}{4}} - px^{\frac{3}{2}} y^7$, vel quia ſub hac forma quadratura non ſuccedit, ducatur aequatio in y^{-7}, eaque mutabitur in $y^{\frac{-16}{3}} = ax^{\frac{1}{4}} y^{-7} - px^{\frac{3}{2}}$; quare $m = -\frac{16}{3}$, $n = \frac{3}{2}$, $e = \frac{1}{4}$, $r = -7$; $a = -p$, et $b = a$, adeoque $\alpha = -\frac{9}{32}$, $\beta = +\frac{15}{46}$, $\gamma = \frac{322}{23}$; $\delta = -\frac{422}{23}$, $\eta (= \alpha + \gamma = \frac{223}{23}) = 1$, $\theta (= \beta + \delta) = \frac{-69}{46} = -\frac{3}{2}$, $\lambda (= \gamma + \delta) = -\frac{10}{23}$. Inde vero $A(= \frac{\lambda}{\eta-\theta}) = \frac{20}{23}$, $B(= \frac{(\gamma-\eta A)a}{\eta+\theta-1, b}) = \frac{8p}{23a}$ $M(= x^{\frac{-\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma}} y^{\frac{\delta}{\alpha\delta-\beta\gamma}}) = x^{\frac{-5}{4}} y^{-7}$, $N(= a + bM) = -p + a x^{\frac{-5}{4}} y^{-7} = x^{\frac{-3}{2}} y^{\frac{-16}{3}}$, et $T(= AM^\eta + BM^{\eta-1} + \text{etc.}) = \frac{20}{23} x^{\frac{-5}{4}} y^{-7} + \frac{8p}{23a}$, adeoque $\int y\,dx (= N^\theta T) = (\frac{20}{23} x^{\frac{-5}{4}} y^{-7} + \frac{8p}{23a}) \times (-p + a x^{\frac{-5}{4}} y^{-7})^{\frac{-3}{2}} = \frac{20}{23} xy +$

$\frac{8}{23}\frac{p}{a}x^{\frac{9}{2}}y^{\frac{8}{3}}$. Hucusque exempla habuimus Curuarum tantum quadrabilium, transeo nunc ad ea quae ducunt ad quadraturam Circuli aut Hyperbolae.

X. Itaque si in aequatione $y^m = ax^n + bx^e y^r$, fuerint $e = \frac{2kn+2n+2}{2k+1}$, $r = \frac{-m+2}{2k+2}$, vel $e = 2kn + 2n + 2$, et $r = -2km - m + 2$, et k numerus quicunque integer affirmatiuus, Curuae area pendebit a Quadratura Circuli vel Hyperbolae. Erit enim in primo casu $\eta(=\alpha+\gamma) = k + \frac{1}{2}$; adeoque $l = k$, et $\varkappa = \frac{1}{2}\ \theta(=\beta+\delta) = \frac{1}{2}$; hinc $Q(=\int M^{\varkappa} N^{\theta-1} dM) = \int \frac{dM\sqrt{M}}{\sqrt{N}} = \int \frac{M dM}{\sqrt{(aM+bMM)}}$.

In secundo vero $\eta(=\alpha+\gamma) = \frac{1}{2}$, $\theta(=\beta+\delta) = k + \frac{1}{2}$, id est $\pi = k$, et $p = \frac{1}{2}$, hinc $R(=\int M^{\eta-1} N^{\theta} dM) = \int \frac{dM\sqrt{(a+bM)}}{\sqrt{M}} = \int \frac{adM+bMdM}{\sqrt{(aM+bMM)}}$.

Exemplum I.

XI. $y^3 = ax^3 + bx^{\frac{14}{3}} y^{-\frac{1}{3}}$ $m = n = 3$, $e = \frac{14}{3}$, $r = -\frac{1}{3}$, hinc $\alpha = \frac{3}{4}$, $\beta = \frac{5}{12}$, $\gamma = \frac{3}{4}$, $\delta = +\frac{1}{12}$; inueniuntur ergo $\eta(=\alpha+\gamma) = 1 + \frac{1}{2}$, $\theta(\beta+\delta) = \frac{1}{2}$, $\lambda(=\gamma+\delta) = \frac{5}{4}$, ergo $\varkappa = \frac{1}{2}$, $A(=\frac{\lambda}{\eta+\theta}) = \Gamma = \frac{5}{18}$; Hinc $T = \frac{5}{9} M^{\frac{3}{2}}$, atque adeo $\int y dx (= N^{\theta} T - (\varkappa + 1)\ \Gamma a Q) = \frac{5}{8} M^{\frac{3}{2}} N^{\frac{1}{2}} - \frac{15}{16} aQ$. Quare si dicatur $P = \int \frac{\lambda dM}{\sqrt{(aM+bMM)}}$ fiet $\frac{15}{16} aQ = \frac{15}{16} \frac{a}{b} N^{\frac{1}{2}} - \frac{15}{32} \frac{aa}{b} P$. adeoque $\int y dx = (\frac{5}{8} M^{\frac{3}{2}} - \frac{15}{16} \frac{a}{b}) N^{\frac{1}{2}} + \frac{15}{32} \frac{aa}{b} P$. Quantitas P pendet a quadratura Cir-

Circuli vel *Hyperbolae*, nempe a quadratura Circuli, ſi b habeat ſignum negatiuum, et *Hyperbolae*, ſi habeat affirmatiuum; adeoque cum ſit $M (= x^{\frac{-\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma}} y^{\frac{\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma}}) = x^{\frac{5}{3}} y^{\frac{-1}{3}}$, ſi R ſignificat arcum Circuli, cuius radius $\frac{a}{2b}$, et ſagitta $M = x^{\frac{5}{3}} y^{\frac{-1}{3}}$, fiet $\int y\,dx = (\frac{5}{3} x^{\frac{5}{2}} y^{\frac{-1}{2}} + \frac{15}{160})\sqrt{N} - \frac{15}{160}\frac{aR}{\sqrt{b}}$, exiſtente $N^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(a - b x^{\frac{5}{3}} y^{\frac{-1}{3}})}$.

Sin vero b ſit coefficiens affirmatiua: ad axem CB conſtruatur Hyperbola aequilatera BD, cuius latus transuerſum ſit $AB = \frac{a}{b}$, et capiatur abſciſſa $BE (= M) = x^{\frac{5}{3}} y^{\frac{-1}{3}}$, ductaque ſemiordinata ED, dicatur ſector CDB $= S$, erit $\int y\,dx = (\frac{5}{8} x^{\frac{5}{2}} y^{\frac{-1}{2}} - \frac{15}{160}\frac{a}{b} \times (a + b x^{\frac{5}{3}} y^{\frac{-1}{3}})^{\frac{1}{2}} + \frac{15}{4} S\sqrt{b}$. Tabula XIII. Fig. 3.

Exemplum 2.

XII. $y^3 = a x^3 + b x^{20} y^{-13}$. Sunt ergo $m = n = 3$, $e = 20$, $r = 13$, adeoque $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{17}{12}$, $\gamma = \frac{1}{4}$, $\delta = \frac{13}{12}$, hinc $\eta (= \alpha + \gamma) = \frac{1}{2}$, $\theta (= \beta + \delta) = \frac{30}{12} = 2 + \frac{1}{2}$, adeoque $\pi = 2$, et $\varrho = \frac{1}{2}$; $\lambda = \frac{4}{3}$. Ex hisce autem inueniuntur $M = x^{17} y^{-13}$, $N (= a + bM) = a + b x^{17} y^{-13}$, nec non $E = \frac{4}{3}$, $F (= \Delta = \frac{a}{72}$, adeoque $V (= E N^{\frac{5}{2}} + \Delta N^{\frac{3}{2}}) = (\frac{4}{3} b x^{17} y^{-13} + \frac{97}{72} a) N^{\frac{3}{2}}$; adeoque $\int y\,dx (= M^{\eta} V + (\varrho + 1)\Delta a R) = (\frac{4}{3} b x^{17} y^{-13} + \frac{97}{72} a) x^{\frac{17}{2}} y^{\frac{-13}{2}} N^{\frac{3}{2}} + \frac{aa}{48} R$. Sit $S = \int \frac{dM}{\sqrt{(aM + bMM)}}$, erit $R = \sqrt{(aM + bMM)} + \frac{1}{2} a S$, fietque $\int y\,dx$ ſeu

area quaesita $= (\frac{a}{3} b x^{17} y^{-13} + \frac{97}{72} a) x^{\frac{17}{2}} y^{-\frac{13}{2}} N^{\frac{3}{2}} + \frac{aa}{48} V(aM + bMM) + \frac{c^2}{96} S$. In hac vero S denotat sectorem *Hyperbolae* vel *Circuli*, per planum constans diuisum, prout coefficiens b signum affirmatiuum vel negatiuum habuerit.

Innumera alia exempla curuarum huiusmodi proferri possent, quarum areae pendent à qradratura Circuli vel Hyperbolae, vel ab vtraque, sed nolo prolixior esse. Id tamen non videtur esse reticendum, per hanc methodum posse quoque inueniri Centra grauitatis et oscillationis in huius generis curuis, cum totum negotium reuocari possit ad quadraturas curuarum quarum aequationes non nisi vnicam inuoluunt indeterminatam et constantes, quemadmodum id iam satis liquere arbitror ex praecedentibus. Pergo iam ad Curuas Quadrinomiales.

XIII. Earum aequatio est $y^m = ax^n + bx^p y^q + cx^r y^s$, vel $-1 + ax^n y^{-m} + bx^p y^{q-m} + cx^r y^{s-m} = 0$ sint $M = x^n y^{-m}$, et $MN = x^p y^{q-m}$, inuenientur $x = M^{\frac{q}{l}} N^{\frac{m}{l}}$, et $y = M^{\frac{n-p}{l}} N^{\frac{n}{l}}$ existente $l = mp + nq - mn$, et hisce in aequatione suffectis, habetur $-1 + aM + bMN + cM^{\frac{mp+qr-mn+ns-ps}{l}} N^{\frac{ns+mr-mn}{l}} = 0$. Sit nunc

1. $mp + qr - mn + ns - ps = 0$, vel $s = \frac{mp+qr-mn}{p-n}$ praecedens aequatio mutabitur in $-1 + aM + bMN + cN^{\frac{ns+mr-mn}{l}} = 0$. Fiant $P = a + bN$, et $Q = \frac{1}{-cN}$

$-cN^{\frac{mr+ns-mn}{l}}$, inuenietur $MP-Q=o$, adeoque $M=P^{-1}Q$, hinc elicientur $x=N^{\frac{m}{l}}P^{\frac{-q}{l}}Q^{\frac{q}{l}}$ et $y=N^{\frac{n}{l}}P^{\frac{p-n}{l}}Q^{\frac{n-p}{l}}$. Hinc $y\,dx=(\frac{m}{l}PQ\,dN-\frac{q}{l}NP\,dQ)N^{\frac{m+n}{l}}P^{\frac{p-n-q}{l}-1}Q^{\frac{n-p+q}{l}-1}$. In hac quantitate vero cum P et Q datae sint per N et constantes, ideo patet elementum areae quaesitae reductum esse ad quantitatem non nisi vnicam indeterminatam N eiusque elementum et constantes inuoluentem. Q. E. I.

2. Si fiat $ns+mr-mm=o$, vel $s=\frac{mn-mr}{n}$, fiet $-1+aM+bMN+cM^{\frac{mp+qr-mn+ns-ps}{l}}=o$. Itaque posita $R=1-aM-cM^{\frac{mp+qr-mn+ns-ps}{l}}$, aequatio mutatur in $-R+bMN=o$, adeoque habetur $N=b^{-1}M^{-1}R$, hinc $x(=M^{\frac{q}{l}}N^{\frac{m}{l}})=b^{\frac{-q}{l}}M^{\frac{m-q}{l}}R^{\frac{m}{l}}$, et $y(=M^{\frac{n-p}{l}}N^{\frac{n}{l}})=b^{\frac{-n}{l}}M^{\frac{-p}{l}}R^{\frac{n}{l}}$, adeoque $y\,dx=(\frac{m-q}{l}R\,dM+\frac{m}{l}M\,dR)b^{\frac{-n-q}{l}}M^{\frac{m-p-q}{l}-1}R^{\frac{m+n}{l}-1}$. Fiat nunc

$\alpha=\frac{mp+qr-mn+ns-ps}{l}$ (propter $ns=mn-mr$) $=\frac{mp+qr-mr-ps}{l}=\frac{r}{n}$

$\beta=\frac{m-p-q}{l}$

$\gamma=\frac{m+n}{l}$. Erit

$b^{\frac{n+q}{l}}\int y\,dx=(\frac{m-q}{l}R\,dM+\frac{m}{l}M\,dR)M^{\beta-1}R^{\gamma-1}$.

$+\frac{m-q}{l}R\,dM=\frac{m-q}{l}dM+\frac{q-m}{l}aM\,dM+\frac{q-m}{l}cM^{\alpha}dM$

$+\frac{m}{l}M\,dR=\quad\frac{-m}{l}aM\,dM-\frac{\alpha m}{l}cM^{\alpha}dM$, ergo

$b^{\frac{n+q}{l}}\int y\,dx=\int(\frac{m-q}{l}dM+\frac{q-2m}{l}aM\,dM+\frac{q-(\alpha-1)m}{l}cM^{\alpha}dM)M^{\beta-1}R^{\gamma-1}$

Quod

Quod si praeterea fiat $\alpha = 2$, quod contingit cum sunt $r = 2n$, et $s = -m$ hoc casu habetur

$b^{\frac{n}{l}+q} \int y\,dx = \int (\frac{m-q}{l} dM + \frac{q-m}{l} a M' dM + \frac{(q-3m)}{l} c M M\,dM) M^{\beta-1} R^{\gamma-1} = \int (\frac{m-q}{l} M^{\beta-1} dM + \frac{q-2m}{l} a M^{\beta} dM + \frac{q-3m}{l} c M^{\beta+1} dM) R^{\gamma-1}$.

Sin vero $\beta (= \frac{m-p-q}{l})$ sit numerus integer positivus, et dicantur

$A = \frac{-\sigma}{\beta+2\gamma}$, $B = \frac{-(\rho+(\beta+\gamma)A)a}{\beta+2\gamma-1,c}$, $C = \frac{-\pi+\beta b-(\beta-\gamma+1)Ba}{\beta+2\gamma-2,c}$,
$D = \frac{(\beta-1)B-(\beta-\gamma+3)Ca}{\beta+2\gamma-3,c}$, $E = \frac{(\beta-2)C-(\beta-\gamma+3)Da}{\beta+2\gamma-4,c}$ etc.

$T = A M^{\beta} + B M^{\beta-1} + C M^{\beta-2} D M^{\beta-3} + E M^{\beta-4} - - - - - \Gamma M + \Delta$, sitque $\Gamma = \gamma \Delta a$, inuenietur $b^{\frac{n}{l}+q} \int y\,dx = T R^{\gamma}$. Adeoque curuae hoc casu quadrabiles sunt absolutae.

SVPPLEMENTVM AD SCHEDAM IN MENSE AVGVSTO ACTORVM ERVDITOR. MDCCXIX. CIRCA PROBLEMA A TAYLORO MATHEMATICIS NON ANGLIS PROPOSITVM, EDITAM,

AVCTORE

I. Hermanno.

Tabula XIV.

CVm ineunte anno 1719 Ill. *D. De Monmort* hanc formulam $\frac{\overset{\delta}{z^{\lambda}}\eta-1\,dz}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}$ a Cel. *Taylore* Mathematicis extra Angliam degentibus ad construendum propositam accepisset, Vir humanissimus eandem quoque

que mihi per litteras commendarat. Quare ſequenti Martio petitam conſtructionem in priuatis ad Ipſum litteris miſi. Interea Cel. noſter *Ioh. Bernoulli* non modo dedit conſtructionem, ſed modum etiam reducendi eiusmodi fractiones ſuſe expoſuit in Actis Erud. Menſ. Iunii illius anni; cuius perpulchrum ſchediaſma hac de re, atque eius praefatio, legi merentur. Quaenam ego eodem in argumento praeſtiterim iudicabit Lector ex iis quae in Menſ. Auguſt. eiusdem anni habentur. Quae eam in rem illic publici iuris feci occaſionem dederunt Viro Cel. *Gabrieli Manfredo* hoc ipſum reductionis negotium latius tractandi, iisque quae tradidi noua adiiciendi, vt videre eſt in Tomo II. Suppl. Diarii Veneti pag. 241. Tandem vero anno 1722 prodiit in Lucem *Harmonia Menſurarum, ſiue Analyſis et Synthеſis per Rationum et Angulorum menſuras promotae*, ex qua nobis demum innotuit, problema illud *Taylorianum* non Praeclariſſimum *Taylorum* ipſum, ſed Acutiſſ. dum viueret, *Rogerum Coteſium* autorem habuiſſe. Nam maxima pars elegantis huius operis verſatur circa conſtructiones eiusmodi formarum, et conſtructiones illae innituntur tantum non omnes egregio theoremati de diuiſione Circuli in partes aequales, cuius tamen demonſtratio Autoris in libro eius poſtumo non reperitur. Ex aliquot tentaminibus circa demonſtrationem theorematis fruſtra ſuſceptis, iudicabam demonſtrationem eius debere eſſe altae indaginis, cum primum in Actis Eruditorum theorema expoſitum vidiſſem, neque poſtea aliter ſenſi, cum Coteſii opera in manus mihi veniſſent, atque ad calcem eorum Anonymi cuiusdam demonſtrationem praefati theorematis vidiſſem:

hanc enim demonſtrationem pereruditam eſſe, vt nemo negare poteſt, ita etiam quicunque eam legit ſtatim videt, non parum laboris a peritiſſimo eius Autore poposciſſe; de alia vero quaerenda non amplius ſollicitus, de toto hoc negotio vlterius non cogitaui, donec aliquo ab hinc tempore ex communicatione cuiusdam Amici, qui ipſe circa eandem demonſtrationem iam praeclare verſatus et elegantem demonſtrationem nactus eſt, Celeberrimi *D. De Moivre Miſcellanea analytica de ſeriebus et quadraturis*, percurrere mihi licuiſſet. In erudito hoc opere occurrit pulchrum theorema de diuiſione Circuli in quotcunque partes aequales, ex quo deinceps magna breuitate et concinnitate deducit tum demonſtrationem theorematis Coteſiani de quo ſupra, tum etiam fractiones conſtruendas ad formas ſimpliciores. Verum tamen quia poſt lectionem vtlibet attentam corollariorum vſum Lemmatis illuſtrantium, ſemper aliquis ſcrupulus remanſit, impediens quo minus credere poſſem Acutiſſimi Viri mentem me recte percepiſſe, id in animum induxi meum, vt adhibito quidem Lemmate *Moivreano*, mea tamen demonſtratione munito, aliam inirem viam in applicatione eius ad demonſtrandum Theorema *Coteſianum*. Vt vero ad rem veniam *D. De Moivre* Theorema, ſeu potius Lemma, ita habet.

Lemma.

Si in Circulo, cuius radius eſt 1, *ſint duo arcus* A *et* X *quorum Coſinus ſint l et x, ſitque* $x+\sqrt{(xx-1)} = (l+\sqrt{(ll-1)})^{\frac{1}{n}}$ *Erit arcus* A *ad arcum* X, *vt n ad* 1.

Nam

Nam $x+\sqrt{(xx-1)}=(l+\sqrt{(ll-1)})^{\frac{1}{n}}$ praebet $(x+\sqrt{(xx-1)})^n=l+\sqrt{(ll-1)}$ et n Log. $(x+\sqrt{(xx-1)})=$ Log. $(l+\sqrt{(ll-1)})$, et differentiando nd Log. $(x+\sqrt{(xx-1)})=d$ Log. $(l+\sqrt{(ll-1)})$. Atque $(x+\sqrt{(xx-1)}=\frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}}$ nam d Log. $(x+\sqrt{(xx-1)})=\frac{dx+\frac{xdx}{\sqrt{(xx-1)}}}{x+\sqrt{(xx-1)}}=\frac{xdx+dx\sqrt{(xx-1)}}{xx-1+x\sqrt{(xx-1)}}$ (vel diuiſo numeratore et denominatore per $x+\sqrt{(xx-1)}$) $=\frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}}$; ſimiliter eſt d Log. $(l+\sqrt{(ll-1)})=\frac{dl}{\sqrt{(ll-1)}}$, quare nd Log. $(x+\sqrt{(xx-1)})=d$ Log. $(l+\sqrt{(ll=1)}$ praebet $\frac{ndx}{\sqrt{(xx-1)}}=\frac{dl}{\sqrt{(ll-1)}}=\frac{dl}{\sqrt{(ll-1)}}$, et ducendo hanc in $\frac{-1}{\sqrt{-1}}$, inuenietur $\frac{-ndx}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{-dl}{\sqrt{(1-ll)}}$, verum $\frac{-dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, et $\frac{-dl}{\sqrt{(1-ll)}}$, ſunt elementa arcuum X et A, ergo ndX$=d$A, adeoque nX$=$A, eſt ergo A:X::n:1. Q. E. D.

Corollarium I.

Dicantur $b=2$, D$=n$; E$=\frac{-n.n-1}{2}+n-2$D; F$=\frac{-n.n-1.n-2}{2.3}-(\frac{n-2.n-3}{2})D+n-4$E; G$=\frac{-n.n-1.n-2.n-3}{2.3.4}+(\frac{n-2.n-3.n-4}{2.3})D-(\frac{n-4.n-5}{2})E+n-6$.F; atque ſic deinceps. Aequatio lemmatis $x+\sqrt{(xx-1)}=(l+\sqrt{ll-1})^{\frac{1}{n}}$ hanc dabit aequationem $b^n x^n-$D$b^{n-2}x^{n-2}+$E$b^{n-4}x^{n-4}-$F$b^{n-6}x^{n-6}+$ etc. $-2l=0$, pro diuiſione arcus A in n partes.

Ponendo enim $x+\sqrt{(xx-1)}=y$, elicietur $yy-2xy+1=0$, ſed eſt quoque $y(=x+\sqrt{(xx-1)}=(l+\sqrt{(ll-1)})^{\frac{1}{n}}$, et per conſequens $y^n=l+\sqrt{ll-1}$),

ex qua deriuatur $y^{2n} - 2ly^n + 1 = o$. In ambabus his aequationibus y est quantitas imaginaria, sed earum ope tolli potest quicquid in iis imaginarii inest, et peruenietur ad aequationem paulo ante exhibitam $h^n x^n - D h^{n-2} x^{n-2} + E h^{n-4} x^{n-4} - \text{etc.} - 2l = o$, cuius radices omnes sunt reales, et tot habet quot vnitates in exponente n continentur.

Corollarium 2.

Hae vero radices sunt Cosinus arcuum huius seriei $\frac{A}{n}, \frac{C-A}{n}, \frac{C+A}{n}, \frac{2C-A}{n}, \frac{2C-A}{n}, \frac{2C-A}{n}, \frac{3C-A}{n}$, etc. per tot terminos continuatae, quot vnitates sunt in numero n. Nam non solum cum arcus A, sed etiam cum arcus $C-A$, $C+A$, $2C-A$, $2C+A$, etc. in n partes diuidi debet, semper eadem redit aequatio in praecedenti Corollario exhibita; quia omnium arcuum illorum communis est chorda, atque adeo communis Cosinus, existente C tota circumferentia.

Corollarium 3.

Si $A = \frac{1}{4}C$, scribam tunc pro A, Q notam quadrantis, et cum eius cosinus l sit $= o$, aequatio diuisioni quadrantis inseruiens erit $h^n x^n - D h^{n-2} x^{n-2} + E h^{n-4} x^{n-4} - F h^{n-6} x^{n-6} + \text{etc.} = o$, cuius radices sunt cosinus arcuum huius seriei $\frac{Q}{n}, \frac{3Q}{n}, \frac{5Q}{n}, \frac{7Q}{n}, \frac{9Q}{n}$, etc. substituendo in serie arcuum Corollarii praecedentis Q pro A, et 4Q pro C. Quod si praeterea duplicentur termini fractionum in eadem arcuum serie, prodibit haec altera $\frac{2Q}{2n}, \frac{6Q}{2n}, \frac{10Q}{2n}, \frac{14Q}{2n}, \frac{18Q}{2n}, \frac{22Q}{2n}$, vel factis $\lambda = 2n$, et $S = 2Q$, ista $\frac{S}{\lambda}, \frac{3S}{\lambda}, \frac{5S}{\lambda}, \frac{7S}{\lambda}, \frac{9S}{\lambda}, \frac{11S}{\lambda}$, etc. denotante S semi-

ſemicirculum. Hinc idem eſt ſiue diuidas quadrantem in n partes, ſiue ſemicirculum in λ partes, nam Coſinus arcuum $\frac{Q}{n}, \frac{3Q}{n}, \frac{5Q}{n}, \frac{7Q}{n}$, etc. et Coſinus arcuum $\frac{S}{\lambda}$, $\frac{3S}{\lambda}, \frac{5S}{\lambda}, \frac{7S}{\lambda}$, etc. dant easdem radices aequationis $b^n x^n - \mathrm{D} b^{n-2} x^{n-2} + \mathrm{E} b^{n-4} x^{n-4} - \text{etc.} = o$, Verum ſi diuidendus ſit S in λ partes, aequatio Corollarii 1. huic caſui applicata praebet $b^\lambda x^\lambda - \mathrm{D} b^{\lambda-2} x^{\lambda-2} + \mathrm{E} b^{\lambda-4} x^{\lambda-4} - \mathrm{F} b^{\lambda-6} x^{\lambda-6} + \text{etc.} + 2 = o$, conuertendo n in λ, et 1 in -1. In ſerie vero arcuum in Corollar. 2. exhibita, mutando quoque A in S, habetur eadem ſeries, quae ſupra in hoc Corollario, nempe $\frac{S}{\lambda}, \frac{S}{\lambda}, \frac{3S}{\lambda}, \frac{3S}{\lambda}, \frac{5S}{\lambda}, \frac{5S}{\lambda}$, etc. ſed in qua ſinguli termini geminati conſpiciuntur, quod indicio eſt numerum radicum inaequalium aequationis $b^\lambda x^\lambda - \text{etc.} = o$ tantum eſſe $\frac{1}{2}\lambda$ ſeu n, vt natura rei poſtulat, et altera aequatio diuiſioni Quadrantis inſeruiens id etiam indicat. Sed diuiſio ſemicirculi in λ partes aliam adhuc arcuum ſeriem ſuppeditat, quorum coſinus alias eiusdem aequationis radices manifeſtant, nempe $\frac{O}{\lambda}, \frac{2S}{\lambda}, \frac{2S}{\lambda}, \frac{4S}{\lambda}, \frac{4S}{\lambda}, \frac{6S}{\lambda}$, etc. quae oritur cum in ſerie Coroll. 2. ponuntur $\mathrm{A} = o$, $\mathrm{C} = 2\mathrm{S}$, et n mutatur in λ, et termini huius ſeriei, eas praeciſe radices indicant, quae in ſerie arcuum $\frac{S}{\lambda}, \frac{S}{\lambda}, \frac{3S}{\lambda}$, etc. erant praetermiſſae, ſed etiam termini illius geminati occurrunt.

Theorema.

Sint $\mathrm{K} = \sqrt{(1 - 2az + z^2)}$; $\mathrm{L} = \sqrt{(1 - 2bz + z^2)}$; $\mathrm{M} = \sqrt{(1 - 2cz + z^2)}$; $\mathrm{N} = \sqrt{(1 - 2z + z^2)}$, et ita porro; Deinde $\alpha =$ ſummae omnium a, b, c, e, etc.

$\beta^2 =$ ſummae productorum omnium, cum ſerici a, b, c, e, etc. bini quique termini inter ſe multiplicantur, $\gamma^3 =$ ſummae productorum cum terni quique eiusdem ſeriei termini inter ſe ducuntur. $\delta^4 =$ productorum ſummae cum quaterni quique inter ſe multiplicantur, $\varepsilon^5 =$ aggregato productorum cum quini quinque continuo inter ſe multiplicantur. $\Phi^6 =$ ſummae productorum cum ſeni termini quique inter ſe ducuntur; et ſic porro. Sintque $\alpha = 0, \gamma^3 = 0, \varepsilon^5 = 0$, etc. verum $\beta^2 b^2 = -D$, $\delta^4 b^4 = +E$, $\Phi^6 b^6 = -F$, etc. vbi litterae D, E, F, etc. easdem quantitates denotant, quas in Coroll. 1. Lemm. praecedentis, n vero numerum factorum K, L, M, etc. His poſitis erit $K^2 L^2 M^2 N^2$ etc. $= 1 + z^\lambda$, exiſtente $\lambda = 2n$.

Nam $K^2 L^2 = 1 - 2az + 4abz^2 - 2az^3 + z^4$;

$$\begin{array}{rrrrr} & & -2b & +2 & -2b \end{array}$$

$K^2 L^2 M^2 = 1 - 2az + 4abz^2 - 8abcz^3 + 4abz^4 - 2az^5 + z^6$,

$$\begin{array}{rrrrr} -2b & +4ac & -4a & +4ac & -2b \\ -2c & +4bc & -4b & +4bc & -2c \\ & +3 & -4c & +3 & \end{array}$$

et ſic porro.

Ex his formulis productorum iam apparet, coefficientes terminorum a primo 1 in quo z nullam, et ab vltimo in quo z maximam dimenſionem habet, aequaliter diſtantes, aequales eſſe, et ex iisdem productum generale omnium factorum fore $K^2 L^2 M^2 N^2$ etc. $= 1 - Dz^2$

$$\begin{array}{rrrrr} & & & & +n \\ +Ez^4 & -Fz^6 & +\text{etc.} & & \\ -n+2.D & +n-4.E & & & \\ +\frac{2n-1}{2} & -\frac{(n-2)(n-3)}{2}D & & & \\ & +\frac{n.n-1.n-2}{2.3} & & & \end{array}$$

Quia

Quia vero per Coroll. 1. Lemm. ſunt $D = n$; $E = -(\frac{n.n-1}{2}) + (n-2)D$; $F = \frac{n.n-1.n-2}{2.3} - (\frac{n-2.n-3}{2})D + (n-4)E$; $G =$ etc. fiet $K^2 L^2 M^2 N^2$ etc. $= 1 + z^{2n}$ (vel propter $\lambda = 2n$) $= 1 + z^{\lambda}$. Q. E. D.

Corollarium 1.

Fiant $t - 2a = 0$, $t - 2b = 0$, $t - 2c = 0$, $t - 2e = 0$ etc. ductisque his omnibus in ſe inuicem, inuenietur aequatio $t^n - \alpha h t^{n-1} + \beta^2 h^2 t^{n-2} - \gamma^3 h^3 t^{n-3} + \delta^4 h^4 t^{n-4} - \varepsilon^5 h^5 t^{n-5} +$ etc. $= 0$, iſta vero per ſuppoſitiones theorematis abit in ſequentem $t^n - D t^{n-2} + E t^{n-4} - F t^{n-6} +$ etc. $= 0$, et facta in hac $t = hx$, inuenietur $h^n x^n - D h^{n-2} x^{n-2} + E h^{n-4} x^{n-4} - F h^{n-6} x^{n-6} +$ etc. quae prorſus eadem eſt cum aequatione Corollarii 1. Lemm. praecedentis, quaeque per Coroll. 3. eiusdem Lemmatis conuerti poteſt in aequationem inſeruientem diuiſioni ſemicirculi in λ partes, $h^{\lambda} x^{\lambda} - D h^{\lambda-2} x^{\lambda-2} + E h^{\lambda-4} x^{\lambda-4} - F h^{\lambda-6} x^{\lambda-6} +$ etc. $+ 2 = 0$, cuius radices ſunt coſinus arcuum $\frac{S}{\lambda}, \frac{S}{\lambda}, \frac{3S}{\lambda}, \frac{3S}{\lambda}, \frac{5S}{\lambda}, \frac{5S}{\lambda}$, etc. vel coſinus arcuum $\frac{0}{\lambda}, \frac{2S}{\lambda}, \frac{2S}{\lambda}, \frac{4S}{\lambda}, \frac{4S}{\lambda}, \frac{6S}{\lambda}$, etc.

Corollarium 2.

Factores quos in theoremate K, L, M, N, etc. nominauimus, deinceps indicabimus per H cum adſcripto numero ordinis illius arcus cuius coſinus influit in compoſitionem factoris. Hanc ob cauſam factores in quibus inſunt coſinus arcuum huius ſeriei $\frac{S}{\lambda}, \frac{S}{\lambda}, \frac{3S}{\lambda}, \frac{3S}{\lambda}, \frac{5S}{\lambda}, \frac{5S}{\lambda}$, etc.

etc. erunt H 1, H 1, H 3, H 3, H 5, H 5, etc. et factores in quibus insunt cosinus arcuum huius seriei $\frac{0}{\lambda}$, $\frac{2S}{\lambda}$, $\frac{2S}{\lambda}$, $\frac{4S}{\lambda}$, $\frac{4S}{\lambda}$, $\frac{6S}{\lambda}$, etc. erunt H o, H 2, H 4, H 4, H 6, etc.

Fig 1. Vnusquisque vero factor H est linea ex puncto dato P in diametro AD semicirculi ABD centro O descripti, ad aliquod circumferentiae punctum B ducta, nempe PB, vbi radius $AO = 1$, et $OP = z$. Nam demissa ex B perpendiculari BC in diametrum, et vocando cosinum arcus AB, qui est OC, k, erit $BP^2 = 1 - 2kz + z^2$, adeoque $BP = V(1 - 2kz + z^2)$.

Corollarium 3.

His positis, si exponens λ est numerus *par*, series arcuum $\frac{S}{\lambda}$, $\frac{S}{\lambda}$, $\frac{3S}{\lambda}$, $\frac{3S}{\lambda}$, $\frac{5S}{\lambda}$, $\frac{5S}{\lambda}$, etc. praebet factores H 1, H 1, H 3, H 3, H 5, H 5, etc. adeoque $H1 \times H1 \times H3 \times H3 \times H5 \times H5 = 1 + z^{\lambda}$.

Series vero arcuum $\frac{0}{\lambda}$, $\frac{2S}{\lambda}$, $\frac{2S}{\lambda}$, $\frac{4S}{\lambda}$, $\frac{6S}{\lambda}$, etc. subministrat factores H o, H 2, H 2, H 4, H 4, H 6, etc. Cum vero primus arcus sit o, et eius cosinus $= +1$, vltimus vero semper sit S, cum λ est numerus par, et cosinus $S = -1$, primus factor erit $Ho = V(1 - 2z + z^2) = 1 - z$, et vltimus seu $Hv = V(1 + 2z + z^2) = 1 + z$; quare cum productum $Ho \times Hv$ sit $= 1 - z^2$, erit $Ho \times H2 \times H2 \times H4 \times H4 \times H6 = 1 - z^{\lambda}$. Nam factores medii H 2, H 2, H 4, H 4, etc. quippe qui omnes bis occurrunt producent $1 - - - - - - + z^{\lambda-2}$ vbi puncta terminos medios inter 1 et z denotant.

Sin

Sin vero exponens λ sit numerus *impar*, series arcuum $\frac{S}{\lambda}, \frac{S}{\lambda}, \frac{3S}{\lambda}, \frac{3S}{\lambda}, \frac{5S}{\lambda}$, etc. admittit factores $H1$, $H1, H3, H3, H5$, etc. quorum vltimus semper erit $= 1 + z$, quia in arcuum serie vltimus hoc casu semper est S. Quare habetur tunc $H1 \times H1 \times H3 \times H3 \times H5 \times \text{etc.} = 1 + z^{\lambda}$.

Series vero altera arcuum, quorum primus est 0, admittit factores $H0, H2, H2, H4, H4$ etc. inter quos cum primus sit $H0 = 1 - z$, et omnes reliqui geminati sint, ideo $H0 \times H2 \times H2 \times H4 \times H4 \times \text{etc.} = 1 - z^{\lambda}$.

Scholium.

Si itaque exponens $\lambda = 6$, diuiso circulo AB in 2λ seu 12 partes aequales, ductisque ex dato puncto P per singula diuisionis puncta rectis $PB1, PB2, PB3$, etc. erit $PB1 \times PB3 \times PB5 \times PB7 \times PB9 \times PB11 = 1 + z^6$. Et $PA \times PB2 \times PB4 \times PB6 \times PB8 \times PB10 = 1 - z^6$. Fig. 2

Similiter si sit $\lambda = 5$, diuiso circulo in 10. partes, ductisque per singula diuisionis puncta rectis, vt in praecedenti casu, erit $PB1 \times PB3 \times PB5 \times PB7 \times PB9 = 1 + z^5$, et $PA \times PB2 \times PB4 \times PB6 \times PB8 = 1 - z^5$.

Problema 1.

Resoluere fractionem $\frac{1}{1 + z^n}$, *in simpliciores, cum exponens* n *est numerus par.*

Dicatur binomium $1 + z^n = Z$, sintque Q^2, R^2, S^2 factores eius per Theorema praecedens inuenti, erit

ergo $\frac{1+z^n}{z^n} = \frac{Z}{z^n}$, et differentiando Logarithmice $\frac{nz^{n-1}dz}{1+z^n} - \frac{ndz}{z} = \frac{dZ}{Z} - \frac{ndz}{z}$, atqui $\frac{nz^{n-1}dz}{1+z^n} - \frac{ndz}{z} = \frac{ndz}{z\times(1+z^n)} = \frac{dZ}{Z} - \frac{ndz}{z}$, adeoque $\frac{n}{1+z^n} = \frac{-zdZ}{Zdz} + n$. Verum propter $Z(=1+z^n) = Q^2\times R^2\times S^2\times$ etc. erit $\frac{dZ}{Z} = \frac{2dQ}{Q} + \frac{2dR}{R} + \frac{2dS}{S} +$ etc. et $\frac{-zdZ}{Zdz} = \frac{-2zdQ}{Qdz} - \frac{2zdR}{Rdz} - \frac{2zdS}{Sdz} -$ etc. Sint iam $Q^2 = 1 - 2az + z^2$, $R^2 = 1 - 2bz + z^2$; $S^2 = 1 - 2cz + z^2$; etc. eruntque $\frac{-2zdQ}{Qdz} = \frac{2az-2z^2}{1-2az+z^2} = -2, + \frac{-2az+2}{1-2az+z^2}$; $\frac{-2zdR}{Rdz} = \frac{2bz-2z^2}{1-2az+z^2} = -2 + \frac{-2bz+2}{1-2bz+z^2}$ $\frac{-2zdS}{Sdz} = \frac{2cz-z^2}{1-2cz+z^2} = -2 + \frac{-2cz+2}{1-2cz+z^2}$, etc. quare collectis singulis partibus, inuenietur $\frac{-zdZ}{Zdz} + n = -2-2-2-$ etc. $+ n + \frac{2-2az}{1-2az+z^2} + \frac{2-2bz}{1-2bz+z^2} + \frac{2-2cz}{1-2cz+z^2} +$ etc. est vero $n-2-2-2-$ etc. perpetuo $=0$, adeoque $\frac{-zdZ}{Zdz} + n = \frac{2-2az}{1-2az+z^2} + \frac{2-2bz}{1-2bz+z^2} + \frac{2-2cz}{1-2cz+z^2} +$ etc. et per consequens $\frac{1}{1+z^n}\left(=\frac{-zdZ}{nZdz}+1\right) = \frac{\frac{2}{n}-\frac{2a}{n}z}{Q^2} + \frac{\frac{2}{n}-\frac{2a}{n}z}{R^2} + \frac{\frac{2}{n}-\frac{2c}{n}z}{S^2} +$ etc.

Corollarium.

Si exponens n est impar, ad factores $Q^2, R^2, S^2,$ etc. duarum dimensionum accedet adhuc factor $V = 1 + z$, vnius dimensionis, adeo vt tunc fiat $\frac{1}{1+z^n} = \frac{\frac{2}{n}-\frac{2a}{n}z}{Q^2} + \frac{\frac{2}{n}-\frac{2b}{n}z}{R^2} + \frac{\frac{2}{n}-\frac{2c}{n}z}{S^2} +$ etc. $+ \frac{\frac{1}{n}}{V}$.

Pro-

Problema 2.

Resoluere fractionem $\frac{1}{1+z^n}$, *in suas primitiuas.*

Si n est numerus par, series factorum $P, Q^2, R^2, S^2 - - -, V$, habebit primum $P = 1 - z$, et vltimum $V = 1 + z$, vnius dimensionis, mediosque Q^2, R^2, S^2, etc. trinomiales et duarum dimensionum, quare procedendo vt in Problemate praecedenti, fit $\frac{1}{1-z^n} = \frac{\frac{1}{n}}{1-z} + \frac{\frac{2}{n} - \frac{2a}{n} z}{Q^2} + \frac{\frac{2}{n} - \frac{2b}{n} z}{S^2} + \frac{\frac{2}{n} - \frac{2c}{n} z}{S^2} + \text{etc.} + \frac{\frac{1}{n}}{V}$.

Sin vero n sit numerus impar, inuenietur $\frac{1}{1-z^n} = \frac{\frac{1}{n}}{P} + \frac{\frac{2}{n} - \frac{2a}{n} z}{Q^2} + \frac{\frac{2}{n} - \frac{2b}{n} z}{R^2} + \frac{\frac{2}{n} - \frac{2c}{n} z}{S^2} + \text{etc.}$

Problema 3.

Diuidere Trinomium $1 \pm 2lz^n + z^{2n}$ *in suos factores primitiuos.*

Sint hi $Q^2 = 1 - 2az + z^2$, $R^2 = 1 - 2bz + z^2$, $S^2 = 1 - 2cz + z^2$, etc. qui in se inuicem ducti producunt seriem theoremate praecedente exhibitam. Quare si in hac serie, vt ibi, omnes post primum terminos euanescere faciamus, vsque ad terminum $\omega^n b^n z^n$, euanescent pariter omnes sequentes post hunc vsque ad terminum $+z^{2n}$, ita vt tota series tunc in trinomium $1 + \omega^n b^n z^n + z^{2n}$ abeat, vel posita $\omega^n b^n = \pm 2l$, in $1 \pm 2lz^n + z^{2n}$. Omnes reliquae coefficientes αb,

$\beta^2 b^2, \gamma^3 b^3$, etc. eosdem valores habebunt ac in dicto theoremate, excepto termino $\omega^n b^n$ qui ad aestimationem quam in theoremate habet ascisset adhuc $\mp 2l$. Hoc modo series Corollarii 1 Theorematis mutabitur in $b^n x^n - D b^{n-2} x^{n-2} + E b^{n-4} x^{n-4} - F b^{n-6} x^{n-6} +$ etc. $\mp 2l = 0$, quae ipsissima est series Lemmatis praecedentis pro diuisione arcus A in n partes. Hic autem arcus A erit quadrante minor, cum l est numerus affirmatiuus, et quadrante maior, cum est numerus negatiuus. Series hic inuenta tot radices habet (per Coroll. 2 Lemm.) quot sunt cosinus arcuum huius seriei $\frac{A}{n}, \frac{C-A}{n}, \frac{C+A}{n}, \frac{2C-A}{n}, \frac{2C+A}{n}, \frac{3C-A}{n}, \frac{3C+A}{n}$, etc. per tot terminos continuatae, quot vnitates sunt in exponente n. Q. E. I.

Quoniam l denotat cosinum arcus A cum sinus totus est 1, l semper minor esse debet quam 1, aut $l = 1$.

Sed si l vnitate maior est, trinomium $1 \mp 2lz^n + z^{2n}$ debet primum in duos factores binomios $\mp p + z^n$, et $\mp q + z^n$ resolui, existentibus $p = l + \sqrt{(ll-1)}$, et $q = l - \sqrt{(ll-1)}$. Factis deinceps $x = z \times \sqrt[n]{\frac{1}{p}}$, et $y = z \times \sqrt[n]{\frac{1}{q}}$, et sient $\mp p + z^n = \mp (1 + x^n) \times p$, et $\mp q + z^n = \mp 1 + y^n \times q$; nam binomia $1 \mp x^n$, et $1 \mp y^n$ per Theorema superius in superius in factores suos primitiuos resolui potest.

Problema 4.

Diuidere fractionem $\frac{1}{1 - 2lz^n + z^{2n}}$ *in suas fractiones primitiuas.*

Di-

Dicatur nunc Trinomium $1-2lz^n+z^{2n}=Z$, et fiat $\frac{1-2lz^n+z^{2n}}{(l-z^n)^2}=\frac{Z}{(l-z^n)^2}$, ac differentiando logarithmice $\frac{-2lnz^{n-1}dz+2nz^{2n-1}dz}{1-2lz^n+z^{2n}}+\frac{2nz^{n-1}dz}{l-z^n}$ (vel reducendo has fractiones ad eandem denominationem) $=\frac{(2n-2lln)z^{n-1}dz}{(l-z^n)\times 1-2lz^n+z^{2n}}=\frac{dZ}{Z}+\frac{2nz^{n-1}dz}{l-z^n}$, vel ducta hac in $\frac{l-z^n}{2z^{n-1}dz}$, haec $\frac{n-lln}{1-2lz^n+z^{2n}}=\frac{(l-z^n)\times dZ}{2z^{n-1}Zdz}+n$. Sed propter $\frac{dZ}{Zdz}=\frac{2z-2a}{Q^2}+\frac{2z-2b}{R^2}+\frac{2z-2c}{S^2}+$ etc. fiet $\frac{l-z^n\times dZ}{2z^{n-1}Zdz}=\left(\frac{-alz^{1-n}+lz^{2-n}+az-z^2}{Q^2}\right)+\left(\frac{-blz^{1-n}+lz^{2-n}+bz-z^2}{R^2}\right)+\left(\frac{-clz^{1-n}+lz^{2-n}+cz-z^2}{S^2}\right)+$ etc. et $\frac{(l-z^n)\times dz}{2z^{n-1}Zdz}+n=\left(\frac{-clz^{1-n}+lz^{2-n}+1-cz}{Q^2}\right)+\left(\frac{-blz^{1-n}+lz^{2-n}+1-bz}{R^2}\right)+\left(\frac{-clz^{1-n}+lz^{2-n}+1-cz}{S^2}\right)$ etc. quare $\frac{n-lln}{1-2lz^n+z^{2n}}\left(=\frac{l-z^n\times dZ}{2z^{n-1}Zdz}+n\right)=\left(\frac{-alz^{1-n}+lz^{2-n}+1-az}{Q^2}\right)+\left(\frac{-blz^{1-n}+lz^{2-n}+1-bz}{R^2}\right)+\left(\frac{-clz^{1-n}+lz^{2-n}+1-cz}{S^2}\right)+$ etc. Sit $K=\beta z^{1-n}+\gamma z^{2-n}+\delta z^{3-n}$ et sic vsque ad $+\lambda z^{-1}$, eritque $KQ^2=\beta z^{1-n}+\gamma z^{2-n}+\delta z^{3-n}+$ etc. $-2a\lambda$ $-2a\beta$ $\alpha^2-2a\gamma$ $1+\beta$ $+n$

$+\lambda z$, vbi $\varkappa$ eſt coefficiens quae terminum λ praecedit; haec vero aequatio mutabitur in $KQ^2 = alz^{1-n} - lz^{2-n} - 2a\lambda + \lambda z$, ſi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. denotant coſinus arcuum $\frac{0A}{n}, \frac{1A}{n}, \frac{2A}{n}$ vsque ad $\frac{n-1.A}{n}$ incluſiue per l multiplicatos. Nominando vero coſinum arcus $\frac{n-1.A}{n}$, f; erit $\lambda = fl$, et $2a\lambda - \varkappa$ inuenietur eſſe coſinus $\frac{nA}{n} = A$, per l multiplicatus, eſt ergo $2a\lambda - \varkappa = ll$, quare euadit $KQ^2 = alz^{1-n} - lz^{2-n} - ll + flz$. Hinc $-alz^{1-n} + lz^{2-n} + 1 - az = -KQ^2 + 1 - ll + (fl-a)z$, adeoque

$$\frac{-alz^{1-n} + lz^{2-n} + 1 - az}{Q^2} = \frac{1 - ll - (a + fl)z}{Q^2} - K;$$

$$\frac{-blz^{1-n} + lz^{2-n} + 1 - bz}{R^2} = \frac{1 - ll - (b + gl)z}{R^2} - L;$$

$$\frac{-clz^{1-n} + lz^{2-n} + 1 - cz}{S^2} = \frac{1 - ll - (c + bl)z}{S^2} - M;$$

etc. Vbi L, M etc. ſunt ſeries eodem modo formatae ex R^2 et S^2, etc. ac K formata fuit ex Q^2, et g, b, deſignant coſinus arcuum $\frac{(n-1)(C-A)}{n}$, $\frac{(n-1)(C+A)}{n}$, etc. quemadmodum f ſignificat coſinum arcus $\frac{n-1.A}{n}$. Hanc ob cauſam inuenitur

$$\frac{n - lln}{1 - 2lz^n + z^n} = \frac{1 - ll - (a + fl)z}{Q^2} + \frac{1 - ll - (b + gl)z}{R^2} + \frac{1 - ll - (c + bl)z}{S^2} + \text{etc.} - K - L - M - \text{etc.}$$

Sed propter $a + b + c + \text{etc.} = o$, ſit etiam $K + L + M + \text{etc.} = o$, adeoque $\frac{n - lln}{1 - 2lz^n + z^{2n}} = \frac{1 - ll - (a + fl)z}{Q^2} + \frac{1 - ll - (b + gl)z}{R^2} + \frac{1 - ll - (c + bl)z}{S^2} + \text{etc.}$ et diuidendo per $n - ll$

$n-lln$, haec $\frac{1}{1\cdot 2lz^n+z^{2n}}=\frac{\frac{1}{n}+\frac{fl-a}{n-lln}}{Q^2}+\frac{\frac{1}{n}+\frac{gl-b}{n-lln}}{R^2}$

$+\frac{\frac{1}{n}+\frac{bl-c}{n-lln}}{S^2}+$ etc. Q. E. I.

Corollarium.

Si $l=o$, inuenietur posito $\lambda=2n$, $\frac{1}{1+z^\lambda}=$

$\frac{\frac{2}{\lambda}-\frac{2az}{\lambda}}{Q^2}+\frac{\frac{2}{\lambda}-\frac{2bz}{\lambda}}{R^2}+\frac{\frac{2}{\lambda}-\frac{2cz}{\lambda}}{S^2}+$ etc. vt in Probl. 1.

Problema 5.

Diuidere fractionem $\frac{1}{1+2lz^n+z^{2n}}$ *in suas primitiuas.*

Posita iterum $Z=1+2lz^n+z^{2n}$, inuenietur simili prorsus processu ac in praecedenti problemate $\frac{lln-n}{1+2lz^n+z^{2n}}$

$=\frac{-alz^{1-n}+lz^{2-n}+1+az}{Q^2}+\frac{-blz^{1-n}+lz^{2-n}-1+bz}{R^2}+$

$\frac{-clz^{1-n}+lz^{2-n}-1+cz}{S^2}+$ etc. Fiat et nunc $K=$

$\beta z^{1-n}+\gamma z^{2-n}+\delta z^{3-n}$ - - - - $\varkappa z^{-2}+\lambda z^{-1}$, et erit hic quoque $KQ^2=alz^{1-n}-lz^{2-n}-2a\lambda+\varkappa$ $+\lambda z$, et $\frac{2a\lambda-\varkappa}{l}=-l$, seu cosinui arcus A quadrante maioris, et $\frac{\lambda}{l}=f$ cosinui arcus $\frac{n-1}{n}A$, et operando deinceps ad ductum Probl. praec. inuenietur $\frac{1}{1+2lz^n+z^{2n}}$

$=$

$$= \frac{\frac{1}{n} - \left(\frac{a+fl}{n-ll n}\right)\approx}{Q^2} + \frac{\frac{1}{n} - \left(\frac{b+gl}{n-ll n}\right)\approx}{R^2} + \frac{\frac{1}{n} - \left(\frac{c+hl}{n-ll n}\right)\approx}{S^2} + \text{etc.}$$

Q. E. I.

Atque haec sunt quibus methodum meam iam anno 1719. in Actis Eruditorum pag. 351. expositam breuiter illustrare, et occasione inuentorum Cel. *Moyvrei* paululum extendere, visum est. Superuacaneum i dico ostendere quomodo superiores formulae in formas *Cotesii* sint transfundendae, cum hoc sit negotium ad purum calculum algebraicum spectans à quolibet Analysta facile expediendum.

DE FORMIS RADICVM AEQVATIONVM CVIVSQVE ORDINIS CONIECTATIO.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

SVmmopere admirandum videtur, quod, cum ipsis rei analyticae initiis radices aequationum cubicarum et biquadraticarum essent inuentae, his tamen temporibus, quibus analysis maxima augmenta accepit, modus adhuc lateat altiorum aequationum radices eruendi: praesertim, cum haec res continuo a praestantissimis ingeniis maximo studio sit inuestigata. Quo studio, quanquam quaesito parum est satisfactum: egregia tamen ad quasque aequationes tractandas subsidia sunt detecta. Quamobrem

obrem neminem puto fore, qui hoc meum inſtitutum, quo, quas formas habeant aequationum radices, et qua via eae forte inueniri poſſint, oſtendo, etiamſi plus non praeſtiterim, ſit reprehenſurus. Alios enim fortaſſe magis iuuare, atque tandem ad intentum ſcopum perducere, poterit.

§. 2. Cum aequatio cuiusque poteſtatis omnes inferiores in ſe comprehendat, facile perſpicitur, methodum quoque radicem ex quaque aequatione extrahendi ita eſſe comparatam, vt omnium inferiorum aequationum methodos inuoluat. Quamobrem inuentio radicis ex aequatione ſex dimenſionum haberi non poteſt, niſi eadem antea conſtet de aequationibus quinti, quarti, et tertii gradus. Ita videmus *Bombellii* methodum, ex aequationibus biquadraticis radices extrahendi, perducere ad reſolutionem aequationis cubicae; atque cubicae aequationis radicem definiri non poſſe ſine quadraticae aequationis reſolutione.

§. 3. Reſolutionem aequationis cubicae ſequenti modo a quadratica pendentem conſidero. Sit aequatio cubica $x^3 = ax + b$, in qua ſecundus terminus deeſt, huius radicem x dico fore $= \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$, exiſtentibus A et B duabus radicibus aequationis cuiusdam quadraticae $z^2 = \alpha z - \mathfrak{C}$. Quamobrem ex natura aequationum erit $A + B = \alpha$ et $AB = \mathfrak{C}$. Sed ad α et $\mathfrak{C}$ ex a et b definiendas ſumo aequationem $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$, quae cubice multiplicata dat $x^3 = A + B + 3\sqrt[3]{BA}(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}) = 3x\sqrt[3]{AB} + A + B$. Quae cum propoſita

$x^3 = ax + b$ comparata dabit $a = 3\sqrt[3]{AB} = 3\sqrt[3]{\mathfrak{C}}$, et $b = A + B = \alpha$. Fiet igitur $\alpha = b$ et $\mathfrak{C} = \frac{a^3}{27}$; quocirca aequatio quadratica resolutioni aequationis $x^3 = ax + b$ dicto modo inseruiens erit $z^2 = bz - \frac{a^3}{27}$. Huius enim radicibus cognitis A et B, erit $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$.

§. 4. Sed cum radix cubica ex quaque quantitate triplicem habeat valorem, haec formula $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ omnes etiam radices aequationis propositae complectetur. Sint enim μ et ν praeter vnitatem radices cubicae ex vnitate, erit etiam $x = \mu\sqrt[3]{A} + \nu\sqrt[3]{B}$, si modo sit $\mu\nu = 1$. Quamobrem μ et ν esse debebunt $= \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $= \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, vel inuerse. Praeter radicem igitur $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ satisfacient quoque propositae hae duae alterae radices $x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{A} - \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{B}$, et $x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{A} - \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{B}$. Hacque ratione aequationis cubicae etiam, in qua secundus terminus non deest, radices determinari poterunt.

§. 5. Aequationes biquadraticae variis modis ad cubicas reduci solent, quorum autem nullus instituto meo vtilitatem afferre potest. Sed mihi est peculiaris methodus idem efficiendi, atque priori, qua cubicae ad quadraticas reducuntur, similis, ita vt exinde quodammodo concludi possit, quomodo aequationes altiorum graduum debeant tractari. Vt si proposita sit haec aequatio

$x^4 =$

$x^4 = ax^2 + bx + c$ in qua itidem secundus terminus deest; dico fore $x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$ at A, B et C esse tres radices ex aequatione quadam cubica $z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$. Hanc ob rem erit $\alpha = A + B + C$, $\beta = AB + AC + BC$ et $\gamma = ABC$. Quo autem α, β et γ determinentur, aequatio $x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$ ab irrationalitate liberetur, hoc modo: Sumantur quadrata erit $x^2 = A + B + C + 2\sqrt{AB} + 2\sqrt{AC} + 2\sqrt{BC}$ hincque $x^2 - \alpha = 2\sqrt{AB} + 2\sqrt{AC} + 2\sqrt{BC}$. Sumendis denuo quadratis fit $x^4 - 2\alpha x^2 + \alpha^2 = 4AB + 4AC + 4BC + 8\sqrt{ABC}(\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}) = 4\beta + 8x\sqrt{\gamma}$, seu $x^4 = 2\alpha x^2 + 8x\sqrt{\gamma} + 4\beta - \alpha^2$. Haec aequatio comparata cum proposita $x^4 = ax^2 + bx + c$ dabit $2\alpha = a$, $8\sqrt{\gamma} = b$ et $4\beta - \alpha^2 = c$; ex quibus prodit $\alpha = \frac{a}{2}$, $\gamma = \frac{b^2}{64}$, $\beta = \frac{c}{4} + \frac{a^2}{16}$. Aequatio ergo cubica resolutioni aequationis biquadraticae inseruiens est $z^3 = \frac{a}{2}z^2 - \frac{4c-a^2}{16}z + \frac{b^2}{64}$. Huius enim radices, si sint A, B, et C, erit $x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$. At reliquae tres radices ex aequatione proposita erunt $\sqrt{A} - \sqrt{B} - \sqrt{C}$, $\sqrt{B} - \sqrt{A} - \sqrt{C}$ et $\sqrt{C} - \sqrt{A} - \sqrt{B}$.

§. 6. Ponatur $z = \sqrt{t}$ erit $(t + \frac{4c+a^2}{16})\sqrt{t} = \frac{at}{2} + \frac{b^2}{64}$, et sumendis quadratis habebitur $t^3 + \frac{4c+a^2}{8}t^2 + \frac{(4c+a^2)^2}{256}t = \frac{a^2t^2}{4} + \frac{ab^2t}{64} + \frac{b^4}{4096}$ seu $t^3 = (\frac{a^2}{8} - \frac{c}{2})t^2 + (\frac{ab^2}{64} - \frac{cc}{16} - \frac{a^2c}{32} - \frac{a^4}{256})t + \frac{b^4}{4096}$. Haec aequatio ergo hanc habet proprietatem, vt eius radices sint radices quadratae radicum prioris aequationis, A, B et C. Quare si huius aequationis radices ponantur E, F, G, erit $x = \sqrt[4]{E} + \sqrt[4]{F} + \sqrt[4]{G}$. Datur itaque aequatio cubica cuius radi-

cum radices biquadraticae simul sumtae constituant radicem aequationis biquadraticae propositae. Atque haec methodus inueniendi radices ex aequatione biquadratica, etiamsi sit priori operosior, maiorem habet affinitatem cum resolutione aequationum cubicarum, cum eiusdem potestatis radix extrahatur ex radicibus aequationis inferioris, cuius est ipsa aequatio proposita.

§. 7. Simili ratione etiam aequatio quadratica $x^2 = a$, in qua secundus terminus deest, resoluetur ope aequationis vnius dimensionis $z = a$. Huius enim radix est a, atque radix aequationis propositae $x = \sqrt{a}$, vel $x = -\sqrt{a}$. Huiusmodi autem aequationem ordine inferiorem, cuius ope aequatio superior secundo termino carens resoluitur, vocabo *aequationem resoluentem*. Ita aequationis quadraticae $x^2 = a$ aequatio resoluens erit $z = a$; aequationis cubicae $x^3 = ax + b$, aequatio resoluens erit $z^2 = bz - \frac{a^3}{27}$. Atque aequationis biquadraticae $x^4 = ax^2 + bx + c$ aequatio resoluens est $z^3 = (\frac{a^2}{8} - \frac{c}{2})z^2 - (\frac{a^4}{256} + \frac{a^2c}{32} + \frac{c^2}{16} - \frac{ab^2}{64})z + \frac{b^4}{4096}$. Pro quadratica enim aequatione, si aequationis resoluentis radix sit A, erit $x = \sqrt{A}$. Pro cubica vero aequatione, si resoluentis radices sint A et B, erit $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$. Atque pro biquadratica aequatione, existentibus resoluentis aequationis radicibus A, B et C, erit $x = \sqrt[4]{A} + \sqrt[4]{B} + \sqrt[4]{C}$.

§. 8. Ex his etiamsi tribus tantum casibus tamen non sine sufficienti ratione mihi concludere videor, superiorum

riorum quoque aequationum dari huiusmodi aequationes resoluentes. Sic proposita aequatione $x^5 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ coniicio dari aequationem ordinis quarti $z^4 = \alpha z^3 - \beta z^2 + \gamma z - \delta$, cuius radices, si sint A, B, C et D, fore $x = \sqrt[5]{A} + \sqrt[5]{B} + \sqrt[5]{C} + \sqrt[5]{D}$. Et generatim aequationis $x^n = ax^{n-2} + bx^{n-3} + cx^{n-4} +$ etc. aequatio resoluens, prout suspicor, erit huius formae, $z^{n-1} = \alpha z^{n-2} - \beta z^{n-3} + \gamma z^{n-4} -$ etc. cuius cognitis radicibus omnibus numero $n-1$, quae sint, A, B, C, D, etc. erit $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C} + \sqrt[n]{D} +$ etc. Haec igitur coniectura, si esset veritati consentanea, atque si aequationes resoluentes possent determinari, cuiusque aequationis in promtu foret radices assignare; perpetuo enim peruenitur ad aequationem ordine inferiorem, hocque modo progrediendo tandem vera aequationis proposita radix innotescet.

§. 9. Quanquam autem, si aequatio proposita plures quam quatuor habet dimensiones, aequationem resoluentem definire adhuc non possum: tamen praesto sunt non nullius momenti argumenta, quibus ista mea coniectura confirmatur. Si enim aequatio proposita ita est comparata, vt in aequatione resoluente omnes termini praeter tres primos euanescant; tum semper ipsa aequatio resoluens poterit exhiberi, atque ideo aequationis propositae radices assignari. Aequationes autem, quae hoc modo resolutionem admittunt, sunt eae ipsae, quas Cl. *Abr. de Moivre* in Transact. n. 309. pertractauit, Sit enim aequatio resoluens $z^{n-1} = \alpha z^{n-2} - \beta z^{n-3}$ seu $z^2 = \alpha z - \beta$,

ex hacque aequationem reſoluendam erui oporteat. Sint huius aequationis radices A et B, reliquae enim radices omnes euaneſcunt, erit aequationis reſoluendae radix $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$. Eſt vero $\alpha = A + B$ et $\mathfrak{C} = AB$ ex natura aequationum. Hinc ergo erit $\sqrt[n]{A^2} + \sqrt[n]{B^2} = x^2 - 2\sqrt[n]{\mathfrak{C}}$. atque porro

$$\sqrt[n]{A^3} + \sqrt[n]{B^3} = x^3 - 3x\sqrt[n]{\mathfrak{C}}$$
$$\sqrt[n]{A^4} + \sqrt[n]{B^4} = x^4 - 4x^2\sqrt[n]{\mathfrak{C}} + 2\sqrt[n]{\mathfrak{C}^2}$$
$$\sqrt[n]{A^5} + \sqrt[n]{B^5} = x^5 - 5x^3\sqrt[n]{\mathfrak{C}} + 5x\sqrt[n]{\mathfrak{C}^2}$$

atque tandem

$$\sqrt[n]{A^n} + \sqrt[n]{B^n} = x^n - nx^{n-2}\sqrt[n]{\mathfrak{C}} + \frac{n(n-3)}{1.2}x^{n-4}\sqrt[n]{\mathfrak{C}^2} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}x^{n-6}\sqrt[n]{\mathfrak{C}^3} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.4}x^{n-8}\sqrt[n]{\mathfrak{C}^4} - \text{etc.} = \alpha.$$

Quae eſt aequatio reſoluenda, cuius reſoluens eſt $z^{n-1} = \alpha z^{n-2} - \mathfrak{C} z^{n-3}$, ſeu $z^2 = \alpha z - \mathfrak{C}$.

§. 10. Non ſolum autem hoc modo aequationis $x^n - nx^{n-2}\sqrt[n]{\mathfrak{C}} + \frac{n(n-3)}{1.2}x^{n-4}\sqrt[n]{\mathfrak{C}^2} - \text{etc.} = \alpha$ vnica radix inuenitur $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$; ſed ſatisfacit etiam quaelibet alia $x = \mu\sqrt[n]{A} + \nu\sqrt[n]{B}$, modo ſit $\mu^n = \nu^n = \mu\nu = 1$, id quod n diuerſis modis fieri poteſt. Vt ſi ſit $n = 5$, aequationis $x^5 - 5x^3\sqrt[5]{\mathfrak{C}} + 5x\sqrt[5]{\mathfrak{C}^2} = \alpha$ radices quinque erunt vt ſequuntur:

I.

I. $x = \sqrt[5]{A} + \sqrt[5]{B}$

II. $x = \frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{A} - \frac{1-\sqrt{5}-\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{B}$

III. $x = \frac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{A} - \frac{1-\sqrt{5}+\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{B}$

IV. $x = \frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{A} - \frac{1+\sqrt{5}-\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{B}$

V. $x = \frac{-1+\sqrt{5}-\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{A} - \frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{B}$.

Hi enim coefficientes omnes sunt radices sursolidae ex vnitate, et factum ex binis coniunctis est $= 1$. Simili modo praeter ipsam vnitatem sunt sex radices potestatis septimae ex vnitate, harumque tria paria multiplicatione vnitatem producentia, quae sunt sex radices huius aequationis $y^6 + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = 0$. Ad has autem inueniendas tantum opus est resolutione aequationis cubicae; omnis enim aequatio potestatis sextae huius formae $y^6 + ay^5 + by^4 + cy^3 + by^2 + ay + 1 = 0$, quae non mutatur posito $\frac{1}{y}$ loco y, resolui potest ope aequationis cubicae. Quod quemadmodum fiat, cum ad inueniendas radices saepe vtilitatem habere possit, breui sum ostensurus.

§. 11 Aequationes huiusmodi, quae posito $\frac{1}{y}$ loco y formam non mutant, voco *reciprocas*. Hae si maximus ipsius y dimensionum numerus est impar, semper diuidi possunt per $y + 1$; et aequatio resultans etiam erit reciproca, in qua maxima ipsius y dimensio erit par. Quamobrem sufficiet parium tantum dimensionum aequationes reciprocas considerasse, atque modum earum resoluendarum exposuisse. Sit igitur primo aequatio pro-

propoſita quartae poteſtatis haec $y^4 + ay^3 + by^2 + ay + 1 = 0$, ponatur haec factum ex duabus quadraticis $y^2 + \alpha y + 1 = 0$ et $y^2 + \mathfrak{B} y + 1 = 0$. Quo facto fiet $\alpha + \mathfrak{B} = a$ et $\alpha\mathfrak{B} + 2 = b$, ſeu $\alpha\mathfrak{B} = b - 2$. Quare α et $\mathfrak{B}$ erunt duae radices huius aequationis $u^2 - au + b - 2 = 0$, hacque ratione quatuor aequationis propoſitae radices ope aequationum tantum quadraticarum innotescent. Aequatio reciproca ſextae poteſtatis $y^6 + ay^5 + by^4 + cy^3 + by^2 + ay + 1 = 0$, ponatur factum trium harum quadraticarum $y^2 + \alpha y + 1 = 0$, $y^2 + \mathfrak{B} y + 1 = 0$, et $y^2 + \gamma y + 1 = 0$. Hinc fiet $\alpha + \mathfrak{B} + \gamma = a$, $\alpha\mathfrak{B} + \alpha\gamma + \mathfrak{B}\gamma = b - 3$, et $\alpha\mathfrak{B}\gamma = c - 2\alpha - 2\mathfrak{B} - 2\gamma = c - 2a$. Quare α, $\mathfrak{B}$, et γ erunt tres radices huius aequationis cubicae $u^3 - au^2 + (b-3)u - c + 2a = 0$. Similiter aequatio reciproca octauae poteſtatis $y^8 + ay^7 + by^6 + cy^5 + dy^4 + cy^3 + by^2 + ay + 1 = 0$, eſt factum ex quatuor aequationibus quadraticis $y^2 + \alpha y + 1 = 0$, $y^2 + \mathfrak{B} y + 1 = 0$, $y^2 + \gamma y + 1 = 0$, et $y^2 + \delta y + 1 = 0$, ex quo prodibit $\alpha + \mathfrak{B} + \gamma + \delta = a$, $\alpha\mathfrak{B} + \alpha\gamma + \alpha\delta + \mathfrak{B}\gamma + \mathfrak{B}\delta + \gamma\delta = b - 4$, $\alpha\mathfrak{B}\gamma + \alpha\mathfrak{B}\delta + \alpha\gamma\delta + \mathfrak{B}\gamma\delta = c - 3a$, et $\alpha\mathfrak{B}\gamma\delta = d - 2b + 2$. Coefficientes ergo $\alpha, \mathfrak{B}, \gamma, \delta$ ſunt quatuor radices huius aequationis $u^4 - au^3 + (b-4)u^2 - (c-3a)u + d - 2b + 2 = 0$. Aequatio ordinis decimi $y^{10} + ay^9 + by^8 + cy^7 + dy^6 + ey^5 + dy^4 + cy^3 + by^2 + ay + 1 = 0$ factum erit harum quinque $y^2 + \alpha y + 1 = 0$, $y^2 + \mathfrak{B} y + 1 = 0$, $y^2 + \gamma y + 1 = 0$, $y^2 + \delta y + 1 = 0$, $y^2 + \varepsilon y + 1 = 0$, in quibus $\alpha, \mathfrak{B}, \gamma, \delta, \varepsilon$ ſunt quinque radices huius aequationis $u^5 - au^4 + (b-5)u^3 - (c-4a)u^2 + (d-3b+5)u - e + 2c - 2a = 0$.

Atque

Atque generatim aequatio reciproca $y^{2n} + ay^{2n-1} + by^{2n-2} + cy^{2n-3} + dy^{2n-4} + ey^{2n-5} + fy^{2n-6} + \text{- - - - - -} + py^n + \text{- - - - -} + fy^6 + ey^5 + dy^4 + cy^3 + by^2 + ay + 1 = 0$, resoluetur in has numero n aequationes quadraticas $y^2 + \alpha y + 1 = 0$, $y^2 + \mathfrak{B}y + 1 = 0$, $y^2 + \gamma y + 1 = 0$, $y^2 + \delta y + 1 = 0$ etc. At coefficientes α, $\mathfrak{B}$, γ, δ, etc. erunt radices huius aequationis n dimensionum:

$$u^n - a\,u^{n-1} + b\left\{\begin{matrix} u^{n-2} \\ -n \end{matrix}\right. - c\left\{\begin{matrix} u^{n-3} \\ +(n-1)a \end{matrix}\right. + d\left\{\begin{matrix} u^{n-4} \\ -(n-2)b \\ +\frac{n(n-3)}{1.2} \end{matrix}\right. - e\left\{\begin{matrix} u^{n-5} \\ +(n-3)c \\ -\frac{(n-1)(n-4)}{1.2}a \end{matrix}\right.$$

$$+ f\left\{\begin{matrix} u^{n-6} \\ -(n-4)d \\ +\frac{(n-2)(n-5)}{1.2}b \\ -\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3} \end{matrix}\right. - g\left\{\begin{matrix} u^{n-7} \\ +(n-5)e \\ -\frac{(n-3)(n-6)}{1.2}c \\ +\frac{(n-1)(n-5)(n-6)}{1.2.3}a \end{matrix}\right. + b\left\{\begin{matrix} u^{n-8} \\ -(n-6)f \\ +\frac{(n-4)(n-7)}{1.2}d \\ -\frac{(n-2)(n-6)(n-7)}{1.2.3}b \\ +\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.4} \end{matrix}\right. - \text{etc.}$$

§. 12. Quia cuiuslibet aequationis quadraticae, diuidentis aequationem propositam, terminus extremus est vnitas, perspicuum est, binarum radicum aequationis propositae factum esse vnitatem. Huiusmodi igitur duae semper cum duobus membris $\sqrt[n]{A}$ et $\sqrt[n]{B}$ sunt coniungendae, quo aequationis §. 9 propositae omnes obtineantur radices.

§. 13. Si in aequatione reciproca omnes termini praeter extremos et medium deficiant, vt in $y^{2n} + py^n + 1 = 0$, diuisores eius $y^2 + \alpha y + 1$, $y^2 + \mathfrak{B}y + 1$, $y^2 + \gamma y + 1$, etc. habebuntur substituendis pro $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. radicibus huius aequationis, $u^n - nu^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}u^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}u^{n-6} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.4}u^{n-8} - \text{etc.} = 0$

$\frac{n(n-3)}{1.2}u^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}u^{n-6} +$ etc. $\mp p = 0$, vbi $+p$ accipi debet si n est numerus par, et $-p$ si n est impar. Ex quo apparet, hanc aequationem conuenire cum aequatione $x^n - nx^{n-2}\sqrt[n]{\beta} +$ etc. $- - = \alpha$ §. 9 resoluta, et hanc ob rem omnes diuisores posse assignari.

§. 14. Magnam isthaec in factores resolutio formulae $y^{2n} + py^n + 1$ habet vtilitatem in integranda formula differentiali $\frac{dy}{y^{2n} + py^n + 1}$ iam saepius a Geometris pertractata. Denominatore enim in suos factores $y^2 + \alpha y + 1$, $y^2 + \beta y + 1$, etc. resoluto tota integratio ad quadraturam circuli vel hyperbolae reducitur. Praeterea hoc plurimum iuuat, quod aequatio $u^n - nu^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}u^{n-4} -$ etc. $\mp p = 0$, ex qua α, β, γ etc. determinantur, sectionem arcus circularis in n partes complectatur, atque ita coefficientes α, β, γ, etc. facillime inueniantur.

§. 15. Reuertamur autem ad modum ex aequationibus resoluentibus ipsas aequationes resoluendas eliciendi. Sitque aequatio resoluens $z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$, cuius tres radices sint A, B, C; erit ergo $\alpha = A + B + C$; $\beta = AB + AC + BC$ et $\gamma = ABC$. Radix itaque aequationis resoluendae x erit $= \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}$, atque ponatur $p = \sqrt[n]{AB} + \sqrt[n]{AC} + \sqrt[n]{BC}$. His factis erit $\sqrt[n]{A^2} + \sqrt[n]{B^2} + \sqrt[n]{C^2} = x^2 - 2p$, et $\sqrt[n]{A^2 B^2} + \sqrt[n]{A^2 C^2} + \sqrt[n]{B^2 C^2} = p^2 - 2x\sqrt[n]{\gamma}$. Atque porro, vt sequitur: $\sqrt[n]{A}$

$$\begin{cases} \sqrt[n]{A^3} + \sqrt[n]{B^3} + \sqrt[n]{C^3} = x^3 - 3px + 3\sqrt[n]{\gamma} \\ \sqrt[n]{A^3B^3} + \sqrt[n]{A^3C^3} + \sqrt[n]{B^3C^3} = p^3 - 3px\sqrt[n]{\gamma} + 3\sqrt[n]{\gamma^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt[n]{A^4} + \sqrt[n]{B^4} + \sqrt[n]{C^4} = x^4 - 4px^2 + 4x\sqrt[n]{\gamma} + 2p^2 \\ \sqrt[n]{A^4B^4} + \sqrt[n]{A^4C^4} + \sqrt[n]{B^4C^4} = p^4 - 4p^2x\sqrt[n]{\gamma} + 4p\sqrt[n]{\gamma^2} \\ \qquad\qquad + 2x^2\sqrt[n]{\gamma^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt[n]{A^5} + \sqrt[n]{B^5} + \sqrt[n]{C^5} = x^5 - 5px^3 + 5x^2\sqrt[n]{\gamma} + 5p^2x - 5p\sqrt[n]{\gamma} \\ \sqrt[n]{A^5B^5} + \sqrt[n]{A^5C^5} + \sqrt[n]{B^5C^5} = p^5 - 5p^3x\sqrt[n]{\gamma} + 5p^2\sqrt[n]{\gamma^2} \\ \qquad\qquad + 5px^2\sqrt[n]{\gamma^2} - 5x\sqrt[n]{\gamma^3} \end{cases}$$

Quemadmodum haec tabula ſit vlterius continuanda facile perſpicitur. Namque eſt $\sqrt[n]{A^m} + \sqrt[n]{B^m} + \sqrt[n]{C^m} = x(\sqrt[n]{A^{m-1}} + \sqrt[n]{B^{m-1}} + \sqrt[n]{C^{m-1}}) - p(\sqrt[n]{A^{m-2}} + \sqrt[n]{B^{m-2}} + \sqrt[n]{C^{m-2}}) + \sqrt[n]{\gamma}.\ (\sqrt[n]{A^{m-3}} + \sqrt[n]{B^{m-3}} \sqrt[n]{C^{m-3}})$. Atque $\sqrt[n]{A^mB^m} + \sqrt[n]{A^mC^m} + \sqrt[n]{B^mC^m} = p(\sqrt[n]{A^{m-1}B^{m-1}} + \sqrt[n]{A^{m-1}C^{m-1}} + \sqrt[n]{B^{m-1}C^{m-1}}) - x\sqrt[n]{\gamma}$, $(\sqrt[n]{A^{m-2}B^{m-2}} + \sqrt[n]{A^{m-2}C^{m-2}} + \sqrt[n]{B^{m-2}C^{m-2}}) + \sqrt[n]{\gamma^2}$ $(\sqrt[n]{A^{m-3}B^{m-3}} + \sqrt[n]{A^{m-3}C^{m-3}} + \sqrt[n]{B^{m-3}C^{m-3}})$.

§. 16. Alias etiam harum progreſſionum non contemnendas obſeruaui proprietates. Poſito enim $\sqrt[n]{A^m}$

$+\sqrt[n]{B^m}+\sqrt[n]{C^m}=R$, et $\sqrt[n]{A^mB^m}+\sqrt[n]{A^mC^m}+\sqrt[n]{B^mC^m}=S$, erit $\sqrt[n]{A^{2m}}+\sqrt[n]{B^{2m}}+\sqrt[n]{C^{2m}}=R^2-2S$, et $\sqrt[n]{A^{2m}B^{2m}}+\sqrt[n]{A^{2m}C^{2m}}+\sqrt[n]{B^{2m}C^{2m}}=S^2-2R\sqrt[n]{\gamma^m}$. Simili modo est quoque $\sqrt[n]{A^{3m}}+\sqrt[n]{B^{3m}}+\sqrt[n]{C^{3m}}=R^2-3RS+3\sqrt[n]{\gamma^m}$, et $\sqrt[n]{A^{3m}B^{3m}}+\sqrt[n]{A^{3m}C^{3m}}+\sqrt[n]{B^{3m}C^{3m}}=S^3-3RS\sqrt[n]{\gamma^m}+3\sqrt[n]{\gamma^{2m}}$. Atque hoc modo haec series procedit prorsus vt ipsa praecedens.

§. 17. Si sit $n=2$; erit $\alpha=x^2-2p$ et $\beta=p^2-2x\sqrt{\gamma}$; hisque duabus aequationibus coniunctis habebitur $x=\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}$ et $p=\sqrt{AB}+\sqrt{AC}+\sqrt{BC}$, sunt autem A, B et C tres radices huius aequationis cubicae $z^3=\alpha z^2-\beta z+\gamma$. Eliminata ergo ex illis duabus aequationibus littera p, prodibit $(\frac{x^2-\alpha}{2})^2-2x\sqrt{\gamma}=\beta$ seu $x^4-2\alpha x^2-8x\sqrt{\gamma}=4\beta-\alpha^2$, cuius aequationis itaque radix x est cognita, quippe $=\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}$, quae aequatio illi est consentanea, quae §. 5. est resoluta. Simili modo si quando duae huiusmodi aequationes occurrent $x^3-3px+3\sqrt[3]{\gamma}=\alpha$ et $p^3-3px\sqrt[3]{\gamma}+3\sqrt[3]{\gamma^2}=\beta$, erit $x=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{C}$ et $p=\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{AC}+\sqrt[3]{BC}$, existentibus A, B et C radicibus aequationis $z^3=\alpha z^2-\beta z+\gamma$, vt ante. Vel eliminata littera p prodibit aequatio inter x, α, β, γ, cuius radix x innotescet. Eodem prorsus modo occurrentibus duabus hisce aequationibus x^4-4px^2

$4px^2+4x\sqrt[4]{\gamma}+2p^2=\alpha$ et $p^4-4p^2x\sqrt[4]{\gamma}+4p\sqrt{\gamma}+2x^2\sqrt{\gamma}=\beta$, erit $x=\sqrt[4]{A}+\sqrt[4]{B}+\sqrt[4]{C}$ et $p=\sqrt[4]{AB}+\sqrt[4]{AC}+\sqrt[4]{BC}$, at iterum sunt A, B et C radices huius aequationis $z^3=\alpha z^2-\beta z+\gamma$. Quo p facilius eliminetur, ponatur $x^2-2p=R$, et $p^2-2x\sqrt[4]{\gamma}=S$, eritque $R^2-2S=\alpha$ et $S^2-2R\sqrt{\gamma}=\beta$. Iam ex illis duabus aequationibus exterminata p habebitur $x^4=2Rx^2+8x\sqrt[4]{\gamma}+4S-R^2$. Comparetur haec aequatio cum ista $x^4=ax^2+bx+c$, erit $R=\frac{a}{2}$, $\sqrt[4]{\gamma}=\frac{b}{8}$ seu $\gamma=\frac{b^4}{4096}$, et $S=\frac{c}{4}+\frac{a^2}{16}$. Hinc igitur habebitur $\alpha=\frac{a^2}{8}-\frac{c}{2}$ et $\beta=\frac{c^2}{16}+\frac{a^2c}{32}+\frac{a^4}{256}-\frac{ab^2}{64}$. Quamobrem erunt A, B et C tres radices huius aequationis $z^3=(\frac{a^2}{8}-\frac{c}{2})z^2-(\frac{a^4}{256}+\frac{a^2c}{32}+\frac{c^2}{16}-\frac{ab^2}{64})z+\frac{b^4}{4096}$, id quod mire consentit, cum eo, quod §. 7. est inuentum.

§. 18. Quoties igitur accidit, vt calculus perducatur ad duas aequationes duas incognitas z et p continentes, quae reperiantur inter formulas §. 15, vtriusque valor poterit assignari, etiamsi eliminata altera aequatio prodeat maxime composita. Hanc ob rem in his casibus expediet calculum non ad vnicam aequationem, vnicamque incognitam, deducere, sed duas aequationes duas incognitas inuoluentes retinere, atque inuestigare, num forte inter illas formulas contineatur, id quod saepius, si calculus recte instituatur, euenire posse mihi persuasum est.

§. 19. Quemadmodum autem aequationes resoluentes $z^2 = \alpha z + \beta$ et $z^3 = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$ tractauimus, ita etiam vlterius est progrediendum ad aequationem $z^4 = \alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma z + \delta$ simili modo pertractandam. Scilicet, si eius radices sint A, B, C, et D, ponatur $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C} + \sqrt[n]{D} = x$, et $\sqrt[n]{AB} + \sqrt[n]{AC} + \sqrt[n]{AD} + \sqrt[n]{BC} + \sqrt[n]{BD} + \sqrt[n]{CD} = p$ atque $\sqrt[n]{ABC} + \sqrt[n]{ABD} + \sqrt[n]{ACD} + \sqrt[n]{BCD} = q$, et quaerantur hinc expressiones pro $\sqrt[n]{A^m} + \sqrt[n]{B^m} +$ etc. et $\sqrt[n]{A^m B^m} + \sqrt[n]{A^m C^m} +$ etc. atque pro $\sqrt[n]{A^m B^m C^m} +$ etc. His perficiendis semper trinae inuenientur aequationes x, p et q continentes pro quouis ipsius m valore. Atque simili modo occurentibus tribus huiusmodi aequationibus, tres incognitae constabunt.

§. 20. Suspicor autem posito $x = \sqrt[5]{A} + \sqrt[5]{B} + \sqrt[5]{C} + \sqrt[5]{D}$ aequationem rationalem posse concinnari, in qua x plures quam 5 non habeat dimensiones, etiamsi hoc fere impossibile videatur. Nam quemadmodum §. 17 ex aequationibus $x^4 - 4px^2 + 4x\sqrt[4]{\gamma} + 2p^2 = \alpha$ et $p^4 - 4p^2 x\sqrt[4]{\gamma} + 4p\sqrt{\gamma} + 2x^2\sqrt{\gamma} = \beta$ eliminanda p aequationem non plurium quam 4 dimensionum obtinuimus, quod pariter vix fieri posse videatur, ita etiam pro quinta potestate forte simile artificium vsu venire potest, vt aequatio $x^5 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tandem resolui queat. Quod vero maximum in hoc perficiendo

est

eſt ſubſidium, eo redit meo iudicio, vt α, β, γ, et δ, ex a, b, c, et d debeant determinari, non vero viciſſim; hoc enim caſu aequatio ad multo altiorem euehereretur poteſtatem, quam opus eſt. Aliis autem, quos huiusmodi occupationes iuuant, hanc rem perficiendam, vel mihi ad aliud tempus, relinquo; hoc ſolo nunc contentus, me fortaſſe ideoneam atque genuinam viam oſtendiſſe.

CONSTRVCTIO AEQVATIONIS DIFFERENTIALIS $ax^n dx = dy + y^2 dx$.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

COmmunicaui nuper cum Societate ſpecimen conſtructionis aequationis cuiusdam differentialis, in qua non ſolum indeterminatas a ſe inuicem ſeparare non potueram, ſed etiam monſtraueram ex ipſa conſtructione huiusmodi ſeparationem omnino non poſſe exhiberi. Differt quidem meus ibi datus conſtruendi modus ab vſitatis: attamen iis nequaquam illum eſſe poſtponendum quilibet intelliget, qui hanc ſchedam inſpexerit. Neque vero tum temporis hanc methodum vlterius extendere, atque ad alias aequationes accommodare licuit, quia ex poſita conſtructione ad aequationem demum perueneram, non autem viciſſim data aequatione conſtructionem eruere potueram. At deinceps cum hanc rem

rem diligentius contemplatus essem, voti mei compos quodammodo sum factus, ita vt hanc methodum inuertere, atque propositae aequationis constructionem inuenire potuerim.

§. 2. Selegi igitur statim ad periculum faciendum hanc maxime agitatam aequationem $ax^n dx = dy + y^2 dx$, quam Clar. *Comes Riccati* primum Geometris examinandam proposuit, nemo vero eius constructionem, nisi pro certis litterae n valoribus, dedit. Meae vero methodi beneficio omnes difficultates feliciter superaui, atque vniuersalem huius aequationis constructionem inueni, in qua nihil omnino desiderari queat. Non solum autem vnicam haec methodus suppeditat constructionem, sed plures, immo etiam innumerabiles. Merito igitur mihi videor isti methodo tantam praestantiam adscribere, vt ad omnes aequationes differentiales construendas, in quibus aliae methodi frustra sunt adhibitae, viam sit commonstratura.

§. 3. Quemadmodum in superiore Dissertatione arcu Elliptico sum vsus, ad constructionem huius aequationis $dy + \frac{y^2 dx}{x} = \frac{x\,dx}{x^2-1}$, ita pro aequatione proposita alia opus erit curua, loco Ellipsis substituenda. Quam vt inueniam pono vniuersalissime eius elementum $= PR\,dz$, in quo P et R sunt functiones ipsius z tales, quae iisdem factis operationibus, vt supra in elemento elliptico, deducant ad aequationem propositam. Pono porro, vt series quaedam in considerationem veniat, $R = 1 + Ag\,Q + AB g^2 Q^2 + ABC g^3 Q^3 + ABCD g^4 Q^4 + \text{etc.}$

in

in qua ſerie eſt Q functio quaedam ipſius z, g linea data ſeu quaſi parameter curuae, A, B, C, D, etc. coefficientes conſtantes. Ponatur $PR\,dz = dZ$; erit ergo $Z = \int P\,dz + Ag\int PQ\,dz + ABg^2\int PQ^2\,dz + ABC g^3\int PQ^3\,dz +$ etc.

§. 4. Ita autem P et Q a ſe inuicem pendeant, vt omnia haec integralia poſſint ad $\int P\,dz$ reduci. Sit ergo $\int PQ\,dz = \alpha\int P\,dz + O1$; $\int PQ^2\,dz = \alpha\beta\int P\,dz + O2$; $\int PQ^3\,dz = \alpha\beta\gamma\int P\,dz + O3$; etc Denotant hic O1, O2, O3 etc. quantitates algebraicas. Poſt peractam hoc modo integrationem ponatur $z = b$: eſt autem b talis quantitas, quae loco z ſubſtituta faciat omnes eas quantitates algebraicas O1, O2, O3, etc. euaneſcere, atque tum ſiat $\int P\,dz = H$ quantitati prorſus conſtanti. Ex his igitur, facto poſt integrationem $z = b$, erit $Z = H(1 + A\alpha g + AB\alpha\beta g^2 + ABC\alpha\beta\gamma g^3 +$ etc.) Facta iam parametro g variabili obtinebuntur infiniti valores ipſius Z pro infinitis ipſius g, atque ex dato elemento $PR\,dz$ poterit conſtrui curua, in qua, ſi abſciſſae deſignentur littera g, applicatae ſunt $= Z$

§. 5. Hoc itaque modo poterit conſtrui ſumma ſeriei $1 + A\alpha g + AB\alpha\beta g^2 + ABC\alpha\beta\gamma g^3 +$ etc. quamuis forte ex ſui ipſius conſideratione ſumma prorſus non poſſit determinari. Vtor autem ad ſummam huius ſeriei inueſtigandam methodo mea ſummae ſeierum inuentionem ad reſolutionem aequationum reducendi, quam anno praeterito expoſui, vt nanciſcar aequationem, cuius reſolutio a ſeriei illius ſumma pendeat. Perſpicuum

enim eſt, vtcunque haec aequatio reſultans fuerit perplexa, eius tamen conſtructionem in promtu futuram. Nunc igitur nihil aliud eſt faciendum, niſi vt quantitates A, B, C, etc. et α, β, γ, etc. efficiantur eiusmodi, vt ſummae ſeriei iſtius inuentio ad reſolutionem huius aequationis $ax^n dx = dy + y^2 dx$ deducatur. Hoc vero loco id eſt efficiendum vt ſeries $1 + Agq + ABgg qq + ABCg^3 q^3 +$ etc. poſſit in ſummam redigi, quia alias valor ipſius R non eſſet cognitus, et proinde integra conſtructio inutilis. Quamobrem non licebit loco A, B, C etc. valores quosuis pro arbitrio accipere, ſed tales, quae hanc ſeriem ſummabilem reddant.

§. 6. Quo igitur appareat, cuiusmodi eſſe debeat ſeries $1 + A\alpha g + AB\alpha\beta g^2 + ABC\alpha\beta\gamma g^3 +$ etc. vt eius ſummatio perducatur ad reſolutionem aequationis $ax^n dx = dy + y^2 dx$; hanc ipſam aequationem in ſeriem reſoluo. Quod vt commodius effici poſſit, pono $y = \frac{dt}{t dx}$, ſumtoque dx conſtante erit $ax^n dx = \frac{ddt}{tdx}$ ſeu $ax^n t dx^2 = ddt$. Nunc more conſueto ſubſtituo loco t hanc ſeriem $1 + \mathfrak{A} x^{n+2} + \mathfrak{B} x^{2n+4} + \mathfrak{C} x^{3n+6} +$ etc. erit $ddt = (n+1)(n+2)\mathfrak{A} x^n dx^2 + (2n+3)(2n+4)\mathfrak{B} x^{2n+2} dx^2 + (3n+5)(3n+6)\mathfrak{C} x^{3n+4} dx^2 +$ etc. Huic igitur ſeriei aequalis eſſe debet $ax^n t dx^2$, ſeu iſta ſeries $ax^n dx^2 + \mathfrak{A} ax^{2n+2} dx^2 + \mathfrak{B} bx^{3n+4} dx^2 +$ etc.; propterea aequales facio terminos homogeneos determinandis litteris $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ etc. pro arbitrio aſſumtis, fietque $\mathfrak{A} = \frac{a}{(n+1)(n+2)}$, $\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A} a}{(2n+3)(2n+4)}$

$\mathfrak{C} =$

$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{B}\alpha}{(3n+5)(3n+6)}$ etc. Ponatur $\alpha x^{n+2} = f$ breuitatis gratia, erit $t = 1 + \frac{f}{(n+1)(n+2)} + \frac{f^2}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)} + \frac{f^3}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)(3n+5)(3n+6)} +$ etc. Huius ergo seriei summatio pendet a constructione aequationis propositae $ax^n dx = dy + y^2 dx$. Quamobrem si series $1 + A\alpha g + AB\alpha\beta g^2 +$ etc. in eam possit transmutari, habebitur simul constructio aequationis propositae.

§. 7. Sed quo haec series, quippe quae nimis est generalis, aliquanto magis restringatur, et determinatio litterarum arbitrariarum facilior efficiatur, pono in formula $PR\,dz$ initio assumta $P = \frac{1}{(1+bz^\mu)^\nu}$, et $Q = \frac{z^\mu}{1+bz^\mu}$. Erit ergo $\int P\,dz = \int \frac{dz}{(1+bz^\mu)^\nu}$, $\int PQ\,dz = \int \frac{z^\mu dz}{(1+bz^\mu)^{\nu+1}}$, et $\int PQ^2\,dz = \int \frac{z^{2\mu} dz}{(1+bz^\mu)^{\nu+2}}$ etc. Possunt autem haec omnia integralia ad primum $\int \frac{dz}{(1+bz^\mu)^\nu}$ reduci: est enim generaliter $\int \frac{z^{\theta\mu} dz}{(1+bz^\mu)^{\nu+\theta}} = \frac{(\theta-1)\mu+1}{b\mu(\nu+\theta-1)} \int \frac{z^{(\theta-1)\mu} dz}{(1+bz^\mu)^{\nu+\theta-1}} - \frac{1}{b\mu(\nu+\theta-1)} \cdot \frac{z}{(1+bz^\mu)^{\nu+\theta-1}}$. Hanc ob rem erit $\int \frac{z^\mu dz}{(1+bz^\mu)^{\nu+1}} = \frac{1}{b\mu\nu} \int \frac{dz}{(1+bz^\mu)^\nu} - \frac{1 \cdot z}{b\mu\nu(1+bz^\mu)^\nu}$, et $\int \frac{z^{2\mu} dz}{(1+bz^\mu)^{\nu+2}} = \frac{1(\mu+1)}{b^2\mu^2\nu(\nu+1)}$

$$\int \frac{dz}{(1+bz^\mu)^\nu} - \frac{(\mu+1)z}{b^2\mu^2\nu(\nu+1)(1+bz^\mu)^\nu} - \frac{1\cdot z^{\mu+1}}{b\mu(\nu+1)(1+bz^\mu)^{\nu+1}}$$

etc. Debebit ergo b eiusmodi esse quantitas, vt loco z substituta faciat $\frac{z^{\mu\theta+1}}{(1+bz^\mu)^{\nu+\theta}}=0$. Non vero poterit esse $b=0$, quia tum plerumque simul quantitas $\int \frac{dz}{(1+bz^\mu)^\nu}$ euanesceret. Comparatis iam his reductionibus cum supra assumtis, determinantur litterae $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. Erit scilicet $\alpha=\frac{1}{b\mu\nu}$ $\beta=\frac{\mu+1}{b\mu(\nu+1)}$, $\gamma=\frac{2\mu+1}{b\mu(\nu+2)}$ etc.

§. 8. Definitis hoc modo litteris α, β, γ etc. considero alteras A, B, C etc. quarum quamlibet video huiusmodi formam $\frac{1}{\sigma\tau}$, scilicet vnitatem diuisam per factum ex duobus factoribus, habere oportere. Quo autem simul series $1+AgQ+ABg^2Q^2+ABCg^3Q^3+$ etc. possit summari, facio $A=\frac{1}{\pi(\pi+\rho)}$, $B=\frac{1}{(\pi+2\rho)(\pi+3\rho)}$ $C=\frac{1}{(\pi+4\rho)(\pi+5\rho)}$ etc. atque tum series ope methodi meae vniuersalis series summandi poterit summari. Pono primo breuitatis gratia $gQ=q^\varrho$, erit $R=1+\frac{q^\varrho}{\pi(\pi+\rho)}+\frac{q^{2\varrho}}{\pi(\pi+\varrho)(\pi+2\rho)(\pi+3\rho)}+$ etc., facioque $R-1=S$ erit $S=\frac{q^\varrho}{\pi(\pi+\rho)}+\frac{q^{2\varrho}}{\pi(\pi+\rho)(\pi+2\rho)(\pi+3\rho)}+$ etc. Multiplico nunc vbique per $\varrho q^{\frac{\pi-\varrho}{\varrho}}$ sumoque differentialia, erit $\frac{\varrho d\left(q^{\frac{\pi-\varrho}{\rho}}S\right)}{dq}$

$$=\frac{q^{\frac{\pi}{\varrho}}}{\pi}+\frac{q^{\frac{\pi+2\varrho}{\rho}}}{\pi(\pi+\varrho)(\pi+2\varrho)}+\text{ etc.}$$

Iam per ϱ multiplico sumoque denuo differentialia ponendo dq constante, prodibit $\frac{\varrho^2 dd\left(q^{\frac{\pi-\varrho}{\rho}}S\right)}{dq^2}=q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}}+\frac{q^{\frac{\pi+\rho}{\rho}}}{\pi(\pi+\varrho)}+$ etc.

etc. $= q^{\frac{\pi-\rho}{\varrho}} + q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} \left(\frac{q^2}{\pi(\pi+\varrho)} + \frac{q^4}{\pi(\pi+\varrho)(\pi+2\varrho)(\pi+3\rho)} + \text{etc.}\right)$ Habebimus ergo reſtituto S loco ſeriei $\frac{1}{\pi(\pi+\varrho)} + \text{etc.}$ hanc aequationem $\varrho^2 dd(q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} S) = q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq^2 + q^{\frac{\pi-\rho}{\varrho}} S dq^2$. Pono porro breuitatis gratia $q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} S = T$, erit $\varrho^2 dd T = q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq^2 + T dq^2$.

§. 9. Ad hanc aequationem integrandam pono $T = rs$, erit $dd T = r\,ddds + 2\,dr\,ds + s\,ddr$, quibus ſubſtitutis habetur $\rho^2 rddds + 2\varrho dr ds + \varrho^2 s ddr = q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq^2 + rs dq^2$ quae in duas aequationes diſcerpatur, $\varrho^2 r\,ddds = rs dq^2$, et $2\varrho^2 dr ds + \varrho^2 s ddr = q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq^2$. Harum prior per r diuiſa abit in hanc $\varrho^2 dd s = s dq^2$, quae per ds multiplicata dat hanc $\varrho^2 ds\,dd s = s\,ds\,dq^2$, cuius integralis eſt $\varrho^2 ds^2 = s^2 dq^2$, ſiue haec $\varrho ds = s dq$, quae denuo integrata dat $\varrho l s = q$ atque $s = c^{\frac{q}{\rho}}$ denotante c numerum, cuius logarithmus eſt 1. Inuento itaque s aſſumo alteram aequationem $2\varrho^2 dr ds + \varrho^2 s ddr = q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq^2$, quae ſubſtituto loco s valore inuento $c^{\frac{q}{\rho}}$ abit in iſtam $2\varrho c^{\frac{q}{\rho}} dq dr + \varrho^2 c^{\frac{q}{\rho}} ddr = q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq^2$. Ponatur $dr = v dq$, erit $ddr = dv dq$ atque aequatio mutabitur in hanc ſimpliciter differentialem $2\varrho c^{\frac{q}{\rho}} v dq + \varrho^2 c^{\frac{q}{\rho}} dv = q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq$, quam multiplico per $c^{\frac{q}{\rho}}$, vt prodeat $2\varrho c^{\frac{2q}{\rho}} v dq + \varrho^2 c^{\frac{2q}{\rho}} dv = c^{\frac{q}{\rho}} q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq$, cuius integralis eſt $\varrho^2 c^{\frac{2q}{\rho}} v = \int c^{\frac{q}{\rho}} q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq$. Fit igitur $v = \frac{1}{\rho^2} c^{-\frac{2q}{\rho}} \int c^{\frac{q}{\rho}} q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq$, et $\int v$

dq, seu $r = \frac{1}{\rho^2} \int c^{\frac{-2q}{\rho}} dq \int c^{\frac{q}{\rho}} q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq$. Erit ergo $rs = T \frac{1}{\rho^2} c^{\frac{q}{\rho}} \int c^{\frac{-2q}{\rho}} dq \int c^{\frac{q}{\rho}} q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq$, et $S = \frac{1}{\rho^2} c^{\frac{q}{\rho}} q^{\frac{\rho-\pi}{\rho}} \int c^{\frac{-2q}{\rho}} dq \int c^{\frac{q}{\rho}} q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq$.

§. 10. Quoniam in hac forma inuenta duplex inuoluitur integratio, notandum est eas ita institui debere vt tam S quam $\frac{dS}{dq}$ fiant $= o$, posito $q = o$, quemadmodum ex serie, cui S est aequale, apparet. His obseruatis habetur tandem $R = 1 + \frac{1}{\rho^2} c^{\frac{q}{\rho}} q^{\frac{\rho-\pi}{\rho}} \int c^{\frac{-2q}{\rho}} dq \int c^{\frac{q}{\rho}} q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq$. Est vero $q = \sqrt{g} Q$, atque ob $Q = \frac{z^\mu}{1 + bz^\mu}$, erit $q = \sqrt{\frac{g z^\mu}{1 + bz^\mu}}$. Dabitur igitur ex his $\int P R dz$ seu $\int \frac{R dz}{(1 + bz^\mu)^\nu}$. Quare si litteris π, ϱ, μ et ν tribuantur debiti valores in n, in promtu erit aequationis propositae $ax^n dx = dy + y^2 dx$ constructio.

§. 11. Hoc facto reuertor ad propositum, atque resumo seriem $1 + A\alpha g + AB\alpha\beta g^2 +$ etc. quae positis loco $A, \alpha, B, \beta, C, \gamma$, etc. electis valoribus transmutatur in hanc $1 + \frac{g}{b\mu\nu\pi(\pi+\rho)} + \frac{(\mu+1)g^2}{b^2\mu^2\nu(\nu+1)\pi(\pi+\rho)(\pi+2\rho)(\pi+3\rho)}$ etc. cuius haec est lex, vt terminus indicis $\theta + 1$ diuisus per terminum indicis θ fit $= \frac{g(1+(\theta-1)\mu)}{(\mu\nu+\theta-1)(\pi+(2\theta-2)\rho)(\pi+(2\theta-1)\rho)}$. In serie vero quam §. 6. ex aequatione proposita elicuimus, est similis quotus termini indicis $\theta + 1$ per terminum indicis θ diuisi $= \frac{f}{(\theta n + 2\theta - 1)(\theta n + 2\theta)}$. Quo igitur hae duae series congruant, oportet vt hi duo quoti sint inter se aequales. Fiat ergo primo $\frac{g}{b} = f$ seu $g = bf$, hoc posito debebit esse $\frac{1}{(\theta n + 2\theta - 1)(\theta n + 2\theta)} = \frac{\theta\mu - \mu + 1}{(\mu\nu + \mu\theta - \mu)(\pi + 2\theta\rho - 2\rho)(\pi + 2\theta\rho - \rho)}$. Vnde si aequatio secundum dimensiones ipsius θ ordinetur, et coefficientes cuiusque ipsius θ potentiae ponantur $= o$, deter-

prodibunt quatuor aequationes ex quibus μ, ν, π, et ϱ determinabuntur in n. Neque vero vnica datur ſolutio, ſed ſunt quatuor diuerſae quae ad noſtrum inſtitutum pertinent. Prima dat $\mu = \frac{2n+4}{3n+4}$, $\nu = 1$, $\pi = n+1$, et $\varrho = \frac{n+2}{2}$. Secunda dat $\mu = \frac{2n+4}{n}$, $\nu = 1$, $\pi = \frac{n}{2}$, et $\varrho = \frac{n+2}{2}$. Tertia dat $\mu = 2$, $\nu = \frac{n+1}{n+2}$, $\pi = \frac{n+2}{2}$ et $\varrho = \frac{n+2}{2}$. Quarta dat $\mu = \frac{1}{3}$, $\nu = \frac{n+1}{n+2}$, $\pi = (n+2)\sqrt{2}$ et $\varrho = \frac{n+2}{\sqrt{2}}$.

§. 12, Quatuor harum ſolutionum non vnaquaeque pro lubitu poteſt adhiberi, ſed pro variis caſibus exponentis n alia atque alia eligi debet. Quae diiudicatio deducenda eſt ex iſta conditione §. 7 memorata, quod $\frac{z^{\mu\theta+1}}{(1+bz^{\mu})^{\nu+\theta}}$ euaneſcere debeat facto $z = b$. Fit hoc quidem ſi $z = 0$, ſed cum praeter hunc alius requiratur, facile apparet, id non euenire poſſe, niſi ponatur $b = \infty$. In quolibet igitur caſu ipſius n talis eligenda eſt ſolutio, vt $\frac{z^{\mu\theta+1}}{(1+bz^{\mu})^{\nu+\theta}}$ fiat $= 0$ poſito $z = \infty$. Denotat hic autem θ numerum quemcunque integrum affirmatiuum non excepta cyphra, quamobrem et ν nunquam eſſe poterit numerus negatiuus, quia alioquin binomium $1+z^{\mu}$ in numeratorem veniret. At μ tam affirmatiuum quam negatiuum numerum ſignificare poteſt, ex quo duplex exiſtit huius rei conſideratio, prout fuerit μ vel affirmatiuus numerus vel negatiuus. Sit primo μ numerus affirmatiuus $= +\lambda$, perſpicuum eſt quo $\frac{z^{\lambda\theta+1}}{(1+bz^{\lambda})^{\nu+\theta}}$ fiat $= 0$, poſito $z = \infty$, oportere maximum ipſius z exponentem in denominatore, qui eſt λ

$\nu + \lambda\theta$ maiorem esse eiusdem z exponente in numeratore, qui est $\lambda\theta + 1$ Erit igitur $\lambda\nu > 1$. Sin autem fuerit μ numerus negatiuus seu $= -\lambda$, fiet $\frac{z^{-\lambda\theta+1}}{(1+bz^{-\lambda})^{\nu+\theta}}$ $= \frac{z^{\lambda\nu+1}}{(z^{\lambda}+b)^{\nu+\theta}}$ quae quantitas vt fiat $= 0$ posito $z = \infty$ debebit esse $\lambda\nu + \lambda\theta > \lambda\nu + 1$, seu $\lambda\theta > 1$, idquod in casu $\theta = 0$ fieri nequit. Quocirca μ nunquam esse poterit numerus negatiuus. In prima igitur solutione, quia est $\nu = 1$, quoties fuerit λ i. e. $\frac{2n+4}{3n+4}$ numerus positiuus, toties simul esse debebit numerus vnitate maior, excipiuntur igitur ii casus quibus $\frac{2n+4}{3n+4}$ est 1 vel vnitate minor. Nisi ergo n contineatur intra hos limites 0 et $-\frac{4}{3}$ prima solutio adhiberi nequit. In secunda solutione, quia iterum est $\nu = 1$, similiter excipiuntur casus, quibus λ seu $\frac{2n+4}{n}$ est vnitas seu vnitate minor. Semper igitur haec solutio locum habebit, his tantum exceptis casibus, quando n continetur intra hos limites -4 et 0. Pro tertia solutione, quia μ iam est numerus positiuus nempe $= 2$ debebit tantum $\frac{2n+2}{n+2}$ esse numerus vnitate maior. Hac igitur semper vti poterimus nisi n contineatur intra hos limites -2 et 0; quoties ergo secunda locum habet, toties et tertia poterit vsurpari. In quarta denique solutione quia μ quoque est numerus affirmatiuus, scilicet $\frac{1}{3}$, requiritur vt $\frac{n+1}{3n+6}$ sit numerus vnitate maior, id quod accidit, quoties n continetur intra hos limites -2 et $-\frac{6}{2}$. In his igitur casibus quarta solutione vti conueniet. Ex quibus inuicem comparatis perspicitur, semper hoc modo aequationis propositae con-

conſtructionem exhiberi poſſe, niſi n contineatur intra hos anguſtos limites $-\frac{4}{3}$ et -2.

§. 13. Quo autem totum hoc negotium euidentius percipiatur, accommodabo, quae hactenus tradita ſunt, ad caſum particularem, quo eſt $n=2$, vt itaque conſtruenda ſit haec aequatio $ax^2dx=dy+y^2dx$. Pro hoc caſu eligo ſolutionem tertiam, eritque propterea $\mu=2$, $\nu=\frac{3}{4}$, $\pi=\varsigma=2$. His valoribus ſubſtitutis habebitur $S=\frac{1}{4}c^{\frac{q}{2}}\int c^{-q}dq\int c^{\frac{q}{2}}dq$. Eſt vero $\int c^{\frac{q}{2}}dq=2c^{\frac{q}{2}}+i$, ergo $\int c^{-q}dq\int c^{\frac{q}{2}}dq=\int 2c^{\frac{-q}{2}}dq+i\int c^{-q}dq=-c^{\frac{-q}{2}}-ic^{-q}+k$. Conſequenter prodit $S=\frac{k}{4}c^{\frac{q}{2}}-\frac{1}{4}c^{\frac{-q}{2}}-\frac{1}{4}$. Quia iam poſito $q=o$ debet euaneſcere s, habebitur iſta aequatio $\frac{k}{4}-\frac{i}{4}-\frac{1}{4}=o$, ſeu $k=1+i$. Porro cum $\frac{dS}{dq}$ debeat eſſe $=o$ ſi $q=o$, proueniet $i+k=o$. Namque eſt $dS=\frac{k}{8}c^{\frac{q}{2}}dq+\frac{i}{8}c^{\frac{-q}{2}}dq$, et idcirco facto $q=o$, fit $\frac{dS}{dq}=\frac{k}{8}+\frac{i}{8}=o$. Ex his igitur conditionibus inuenitur $i=-\frac{1}{2}$, et $k=\frac{1}{2}$: quamobrem erit $S=\frac{c^{\frac{q}{2}}+c^{\frac{-q}{2}}}{8}-\frac{1}{4}$, atque $R=\frac{3}{4}+\frac{c^{\frac{q}{2}}+c^{\frac{-q}{2}}}{8}$. Quoniam vero eſt $\mu=2$ et $g=bf$, erit $q=\sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}}$, adeoque $R=\frac{3}{4}+\frac{1}{8}c^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}}}+\frac{1}{8}c^{\frac{-1}{2}\sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}}}$. Conſequenter reperitur $\int PR\,dz=\frac{3}{4}\int\frac{dz}{(1+bz^2)^{\frac{3}{4}}}+\frac{1}{8}\int\frac{dz\left(c^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}}}+c^{\frac{-1}{2}\sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}}}\right)}{(1+bz^2)^{\frac{3}{4}}}$

Quod integrale ita capiatur, vt posito $z=o$ ipsum fiat $=o$, quo facto ponatur $z=\infty$, et prodibit quantitas, quae vt functio ipsius f potest spectari. Fiat deinde f variabilis, eiusque loco ponatur ax^4, erit ista functio per H diuisa $=t$ (vid. §. 6.). Atque inuento hoc t erit $y=\frac{dt}{4dx}$, qui est verus valor ipsius y ex aequatione proposita $ax^2\,dx=dy+y^2\,dx$.

§. 14. Non difficilior euadit constructio aequationis generalis $ax^n\,dx=dy+y^2\,dx$, dummodo n non contineatur intra hos limites o et -2. Vti enim poterimus solutione tertia, in qua fit $\mu=2$, $\nu=\frac{n+1}{n+2}$, $\pi=\varrho=\frac{n+2}{2}$. Erit igitur $S=\frac{1}{\rho^2}c^{\frac{q}{\rho}}\int c^{\frac{-2q}{\rho}}\,dq\int c^{\frac{q}{\rho}}\,dq$. Integratione simili quo supra modo instituta, reperitur $S=\frac{k}{\rho^2}c^{\frac{q}{\rho}}-\frac{i}{\rho^2}c^{\frac{-q}{\rho}}-\frac{1}{\rho^2}$, vbi i et k ex his aequationibus debent definiri $k=1+i$, et $k+i=o$, est ergo vt ante $i=-\frac{1}{2}$ et $k=\frac{1}{2}$. Quapropter est $S=\frac{1}{2\rho^2}c^{\frac{q}{\rho}}+\frac{1}{2\rho^2}c^{\frac{-q}{\rho}}-\frac{1}{\rho^2}$ atque $R=1-\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{2\rho^2}c^{\frac{q}{\rho}}+\frac{1}{2\rho^2}c^{\frac{-q}{\rho}}$ vel posito loco ϱ valore $\frac{n+2}{2}$ habebitur $R=\frac{n(n+4)+2c^{\frac{2q}{n+2}}+2c^{\frac{-2q}{n+2}}}{(n+2)^2}$

Est vero vt ante $q=V\frac{bfz^2}{1+bz^2}$, at $P\,dz=\frac{dz}{(1+bz^2)^{\frac{n+1}{n+2}}}$

Quamobrem erit $\int PR\,dz=\frac{1}{(n+2)^2}\int\frac{dz}{(1+bz^2)^{\frac{n+1}{n+2}}}$

$(n(n+4)+2c^{\frac{2q}{n+2}}+2c^{\frac{-2q}{n+2}})$ vbi loco $V\frac{bfz^2}{1+bz^2}$ relin-

quo

quo q. Integrale huius PR dz ita capiatur, vt posito $z = o$, ipsum euanescat, quo facto ponatur $z = \infty$, denotetque H id quod prouenit, si tantum $\int \frac{dz}{(1+bz^2)^{\frac{n+1}{n+2}}}$ hoc modo integretur vt fiat $= o$ posito $z = o$, et postmodum ponatur $z = \infty$. Tum ergo erit integrale ipsius PR dz praescripto modo acceptum, quod posuimus Z §. 4. functio ipsius f. Aequale id autem erat positum quantitati H, in hanc seriem $1 + A\alpha g + AB\alpha\beta g^2 +$ etc. multiplicatae, quae series in sequentem est transmutata $1 + \frac{f}{(n+1)(n+2)} + \frac{f^2}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)} +$ etc. cuius summa est t, vid. §. 6. vbi f designat ax^{n+2}. Erit ergo $Z = Ht$, inquo H est quantitas constans, quia in ea non ineſt f, adeoque nec x. Prouenit itaque $t = \frac{Z}{H}$, at est $y = \frac{dt}{tdx}$: ergo pro aequatione proposita $ax^n dx = dy + y^2 dx$ prodibit $y = \frac{dZ}{Zdx}$. Ad illam igitur aequationem construendam habemus hanc regulam: Integretur haec formula $\frac{1}{(n+2)^2} \frac{dz}{(1+bz^2)^{\frac{n+1}{n+2}}} (n(n+4) + 2c^{\frac{2}{n+2}} \sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}} + 2c^{\frac{-2}{n+2}} \sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}})$ ita vt euanescat facto $z = o$. Tum ponatur z infinitum, et loco f substituatur ax^{n+2}. Id quod prouenit sit Z, quo cognito erit $y = \frac{dZ}{Zdx}$. Si quem offendat, quod post integrationem debeat fieri $z = \infty$, is loco z substituat $\frac{u}{1-u}$ et post integrationem ponatur $u = 1$, quo facto pro Z idem prodibit valor, qui ante. Quamuis autem analytica pro Z expressio obtineri non potest, quando for-

mula illa non eſt integrabilis tamen, per quadraturas vel rectificationes valor ipſius Z conſtrui poterit.

§. 15. Quanquam autem in hac conſtructione ii caſus excluduntur, in quibus n continetur intra limites -2 et 0, nihilo tamen minus haec ſolutio pro vniuerſali eſt habenda. Nam quia, ſi aequatio poteſt reſolui in caſu $n=m$, reſolutio quoque habetur in caſu $n=-m-4$, vt conſtat, ex iis, quae de caſibus ſeparabilibus ſunt detecta; perſpicuum eſt, ſi m ſit numerus intra limites 0 et -2 contentus, fore $-m-4$ intra terminos -2 et -4 comprehenſum, adeoque in ſolutione noſtra contineri. Quamobrem ſi occurrat caſus, quo n contineatur intra 0 et -2, hic ſtatim reducatur ad alium per dictum theorema, qui intra -2 et -4 contineatur, huiusque conſtructio erit in promptu.

§. 16. In formula differentiali §. 13. eruta obſeruo, quoties habuerit $\frac{n+1}{n+2}$ huiusmodi formam $k+\frac{1}{2}$, vbi k numerum integrum affirmatiuum denotat, integram formulam poſſe integrari, et hanc ob rem valorem ipſius Z re ipſa exhiberi. His igitur in caſibus valor ipſius y quoque poterit definiri et aequatio integrari. Fiet tum autem $n=\frac{-4k}{2k-1}$, quoties ergo n talem habuerit formam, aequatio $ax^n dx=dy+y^2 dx$ integrationem admittet. Deinde quia caſus, ſi $n=\frac{-m}{m+1}$ vel $n=-m=4$ reduci poteſt ad caſum $n=m$, integrabilis etiam erit aequatio ſi $n=\frac{-4k}{2k+1}$ vel $\frac{-4k-4}{2k+1}$ denotante k numerum integrum affirmatiuum. Atque hi

hi ſunt illi ipſi caſus integrabiles vel ſeparabiles, ab aliis iam eruti, vbi videre licet in noſtris Commentariis A. 1726.

§. 17. Eſſe autem aequationem integrabilem, quoties ſit $\frac{n+1}{n+2} = k + \frac{1}{2}$ hoc modo oſtendo. Pono $\frac{bz^2}{1+bz^2} = u^2$; erit $z = \frac{u}{\sqrt{b}(1-u^2)}$ $1 + bz^2 = \frac{1}{1-u^2}$ ideoque $dz = \frac{du}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{b}}$ Fiet igitur $\frac{dz}{(1+bz^2)^{n+2}} = \frac{du}{\sqrt{b}}(1-u^2)^{k-1}$. Hanc ob rem formula §. 14 integranda transformabitur in hanc $\frac{1}{(n+2)^2\sqrt{b}}(n(n+4)du(1-u^2)^{k-1} + 2c\frac{2u\sqrt{f}}{n+2}du(1-u^2)^{k-1} + 2c\frac{-2u\sqrt{f}}{n+2}du(1-u^2)^{k-1})$, quae vt facile perſpicitur re ipſa integrari poteſt, quoties k fuerit numerus integer affirmatiuus. Atque hinc non parum praeſtantiae accedere arbitro huic meae methodo, quad tam ſit facilis et perſpicua, vt caſus etiam omnes qui reipſa integrationem vel ſeparationem admittunt, vno obtutu oſtendat.

§. 18. Exempli gratia aſſumo $k = 1$, erit $n = -4$, qui caſus, vti conſtat, eſt facillimus eorum, qui ſeparationem admittunt. Formula igitur integranda abibit in hanc $\frac{1}{2\sqrt{b}}(c^{-u\sqrt{f}}du - c^{u\sqrt{f}}du)$, cuius integralis eſt $\frac{1}{2\sqrt{bf}}(c^{u\sqrt{f}} - c^{-u\sqrt{f}})$. Conſtantem non adiicio quia poſito $z = 0$, ſeu quod eodem recidit $u = 0$, totum integrale iam euanescit. Fiat nunc $z = \infty$ ſeu in noſtro caſu $u = 1$ et ponatur ax^{-2} loco f habebitur $Z = \frac{x}{2\sqrt{ab}}(c^{\frac{\sqrt{a}}{x}} - c^{\frac{-\sqrt{a}}{x}})$. Hoc inuento, erit vt iam eſt oſtenſum y

$= \frac{dZ}{Zdx}$. Differentiato igitur Z et differentiali per Zdx diuiso prodibit $y = \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{a}}{x^2}\left(\frac{e^{\frac{2\sqrt{a}}{x}} + 1}{e^{\frac{2\sqrt{a}}{x}} - 1}\right)$ siue $\frac{2\sqrt{a}}{x} = l\frac{xxy - x - \sqrt{a}}{xxy - x + \sqrt{a}}$, quae aequatio est integralis huius differentialis $ax^{-4}dx = dy + y^2 dx$. Atque simili modo pro reliquis casibus, qui separationem admittunt, aequationes integrales inueniuntur.

CLAS-

CLASSIS SECVNDA

CONTINENS

PHYSICA.

CLASSIS SECUNDA.

PHYSICA

DE MVTILATIONE BRACHIORVM IN PVERO,

Cuius Tom. III. Comment. facta eſt commemoratio,

DISSERTATIO ANATOMICO-PHYSIOLOGICA.

AVCTORE
I. G. D.

PRoëmii loco, ad Generationis ſeu cauſſae efficientis Monſtrorum dilucidationem duce experientia perſequendam, res ipſa veluti hortari videtur.

§. 1. Sub molli itaque ac tenui pellicula ſeu cortice conglobato ſubque communi ea conditione, cuncta Animantia, cuiuscunque ſint generis, per maris ac foeminae congreſſum quotidie progigni, porro ſub eadem forma ſphaeroide in vteri cauum laeuigatum deuoluta incrementi cauſſa ad certum temporis ſpatium ibidem commorari, hancque Generationis conſtantem perpetuamque legem eſſe, Naturae peritis ſatis ſuperque compertum eſt. Porro, tametſi intellectu plura arcana in Animalium conceptione aſſequi haud liceat, ignorare profecto minus poſſumus, quorumcunque Animantium foetus ſub praefata conditione in vtero verſari, vt

corpora ſeparata et diſtincta, ſine vteri et foetus copula, ſicque iſtiusmodi ratione foetus in vtero nutritionem ac incrementum perfici. Quid enim? pro tantilla mora temporis, quo foetus in parentis ſinu vitam trahit, nexu vaſorum opus eſſe, hinc quoties fit noua conceptio eundem ſimiliter inſtitui, ſicque in illo nexu foetus nutritionem circuitumque conſiſtere exiſtimabimus? Enimuero ſub primis menſibus, ouum ſeu Embryo nunquam alligatus obſeruatus eſt, aſt ſolitarius ac indeterminatus; Interim eo in ſtatu robur ac incrementum eum in dies aſſumere, ſenſu iudice internoſcere procliue eſt. Verum tamen iſtiusmodi forte nexu progreſſu temporis opus eſt, non ſolum ad firmitatem et ſtabilitatem foetus, verum praecipue ad vaſorum vmbilicalium vterinorumque inoſculationem, vt ſanguinis e praefatis vaſis poſt partum effluxu manifeſtum eſt; Ad quod reſpondeo, quod impraegnationis initio, tametſi vincula inter vterum et foetum haud manifeſto ſint poſita, per irritationem vel per relaxationem vteri, idem effluxus ſanguinis per muliebria, aeque ac in partu legitimo obſeruetur, in quo viceverſa, vt experientia teſtatur, eiusmodi euacuatio interdum penitus deficit. Porro duce Anatome conſtat, vteri ſinus et emiſſaria, itidemque vaſa foetus vmbilicalia et placentae rudimentum inter Chorii lamellas initio aeque ac progreſſu grauiditatis eſſe poſita. Ergo naturae legibus magis eſſet conſonum, vt iſtiusmodi inoſculatio celeriter perficeretur, quemadmodum in plantis fructus principio eſt alligatus. ad quam profecto connexionem eo propenſior eſt foetus, quo minor eſt a primordio eius reſiſtentia. Iam vero,

vt

vt multiplici experientia compertum eſt, in Animantium foetibus, qui a primordio nexus ſunt expertes, ea conditio plane omiſſa eſt. Caeterum, nullo negotio ſedem ſuam relicturum eſſe, ac propterea in lubrico verſari foetum, quia nexu caret, obiicientibus facile erit reſpondere, videlicet ceruicis vteri conformationem aeque ac vteri ſitum, potentiam vinculis aequipollentem habere: Nam vt ſitus vteri obliquus ac in dorſum inclinatus, foetum ne in eius ceruicem facile prouoluatur retinet, ſic profecto eiusdem ceruicis oſculum a Natura eſt impeditum et coarctatum, vt Embryonis moles tametſi minima, pertransire nequeat.

§. 2. Quibusnam autem principiis ea quae hactenus praefatus ſum, innitantur, ex ſequentibus phaenomenis iam intelligere procliue eſt. 1. Viuentia in aliorum animantium viſceribus foeta, tametſi vitam in iis agant et conſeneſcant, nexus tamen inter ſe expertia ſunt. Pro exemplo ſint vermes, ſpermatici, lumbrici, et alia genera viuentium, ſucco ſeu humori ſibi accommodato innatantia et vinculo omni libera. Porro 2. ouua foecunda in magna parte pennatorum, piſcium, reptilium, inſectorumque, in aërem, vel terram vel aquam proiecta, ſponte ſeparatimque, vt ſenſibus apparet, extra Parentis ſinum, ſuſtentari, educari, ac proſpere tandem excludi certum eſt, tametſi iisdem aeque ac viuiparorum foetibus vaſa vmbilicalia communia ſint. Hinc 3. in magna quoque parte Viuiparorum Animantium, vtero contentos foetus huud eius parietibus verè alligatos, ſed ſolummodo contiguos ac plane liberos eſſe, aeque ſen-

ſibus perſpicuum eſt. 4. Inter foetus exteriora inuolucra glutinis expanſi ſubſtantiam referentia, et inter vteri parietes: earumdemque membranarum duplicaturam, Lymphae gelatinoſae notabilis copia innatat. Vnde profecto conſequitur, per eam disiungi foetum ab vtero, ne inuicem coaleſcant, dumque ea in illius alimentum cedit, haud per vias abſconditas ac progreſſu temporis fabricatas, ſeu per canales ex vtero ad foetum tendentes, ſed e contra, per emanationem ſeu in vteri cauum expulſionem, eiusdem lymphae iter perfici? Quibus principiis poſtremo, obſoleta notio de incremento foetus in vtero, lucem fortuito affundit, nempe, quod nutritio continuata generatio, hinc leges vtriusque ſint communes. Iam vero, a vi foecundante ſeminum in vtero effuſorum, hincque partim vteri emiſſaria iisque incluſos ſuccos, partim ouuli poros ſubeunte, formationem foetus perfici omnes ſtatuunt: Quae propterea actio efficitur haud per tubulos inuicem communicantes, ſed tantummodo per vteri ac ouui propriam originalemque ſtructuram et dispoſitionem, quae aeque, vt aliarum partium natura, conſtans et inuariabilis futura, et in fine, aeque ac principio vitae, ſine intermiſſione eſt perduratura: Ob eam igitur cauſſam, foetus in vtero incrementum aeque ac eiusdem generationem, haud per tubulos vtero et foetui communes ac inuicem copulatos, ſed per materiae e ſinibus et oſculis vteri in eius cauum effuſae, hincque per ouui pelliculas et meatus inuiſibiles, ductusque placentae proprios reſorptae haud interruptum motum perfici, forte minus a vero eſt alienum.

§. 3.

§. 3. Hinc profecto, in originis Monſtrorum, ſeu cauſſarum efficientium explanatione, quidnam veritati magis aut minus propenſum, ac conditionibus vteri ſoetusque ſit accommodatum, omnes facile perſpecturos eſſe confido. Etenim, quod Grauidarum phantaſiae natura ſoetus ſit propenſior, quod vtriusque ſenſationes ſint mixtae, ac poſtremo, quod per eiusmodi harmoniam Monſtra generentur, neſcio qua falſa veri ſpecie deluſi, plures hodienum ſuſtinent. Equidem fateor, ſi Matris ſenſationes naturales, vt ſunt fames, ſomnus, vigiliae, inſomnia, dolor, ſoetui ſunt communes, nil profecto vetat, vt ſimiliter per commemoratam harmoniam, grauidae imaginantis vim in ſoetum transferri poſſibile ſit. Interim tamen fatendum eſt, earum ſenſationum indicia nonnulla futura eſſe, quibus de earumdem in ſoetu actione ſeu impreſſionibus, deque ſenſibilitate ſoetus, certiores reddantur vtero gerentes. Hinc autem tantum abeſt, vt indiciis quibusdam firmis et ſolidis, iſtiusmodi doctrina inniti, quin ex aduerſo iisdem per experientiam euerti poſſit: Nam multoties, contra animi voluntatem et deſiderium, manifeſtam contradictionem inter proprias et inter ſoetus ſenſationes percipere grauidis procliue eſt: Sic in eiusdem generis, ſeu in duabus conſimilibus ſenſationibus, haud vna ſed oppoſita ratione, in diſſimilibus viceuerſa, ſimili ad ſenſum ratione ſoetum ſeſe geſturum eſſe, ipſaemet aſſerunt: Num harmoniae ea ſint indicia, id veri ſtudioſis ac peritis definiendum relinquo? Porro, tametſi ſoetus eiusque partium reſiſtentia perexigua, eaque de cauſſa, eiusdem Natura commotionibus valde propenſa videatur, numquid potius con-

trarium ex eo inferre procliue esset? Nam, quum per foetus anatomen sit manifestum, haud aequalem fieri e corde ad cerebrum sanguinis distributionem vt in adulto, eiusdemque porro sanguinis in foetu aëre vacuam esse conditionem, ac postremo, cerebri foetus compagem firmitate et tensione minima pollere; Hinc profecto consequi videtur, spirituum in foetu vsque ad eius exclusionem valde impeditam perexiguamque tum generationem, tum eorumdem in cerebri fibrillas influxum actionemque fore: quare etiam, foetus in vtero versantis sentiendi facultatem esse valde imperfectam verosimile est. Quam porro sensuum imbecillitatem seu stuporem, contemplatio recens editorum foetuum confirmare videtur: Nam obseruamus, eos inter tumultum ac vociferationes commotionesque placide dormire, ingrata promiscue ac dulcia lambere ac deglutire, oculis admota visu haud discernere, lac Parentis perterritae aut ira percitae, impune et absque subsequente valetudinis perturbatione saepenumero sugere: Vnde profecto, de spirituum inertia vel eorum defectu, et, quod consequitur, ad impressiones exigua propensione, coniecturam facere procliue est.

§. 4. Sed, tametsi haud esset commentitia istiusmodi spirituum harmonia, spiritibusque a phantasia Matris motum ingentem imprimi posse crederemus, tam admirabilia sunt effecta in monstris obuia, vt per commemoratum motum spirituum ea produci, vt est multorum opinio, prorsus sit incredibile: Nam demus, foetui esse communem eiusdem obiecti ideam seu impressionem

quam

quam, vt in parente, comitantur ſimiles, aut ſi vis, grauiores et violentae commotiones et conturbationes ſpirituum in quacunque parte corporis, inde fateor oportet, vt in eius textura et humorum circuitu, iuxta leges omnibus fluidis ſolidisque corporibus inſitas, certi et determinati effectus in foetu aeque ac matre ſequantur. Ecce vero! in monſtris incomprehenſibile artificium rerumque vel inuſitatam excellentemque mixturam vaſorum, neruorum ac partium maxime inſignium vel iacturam vel translocationem, compoſitiones, demolitionesque ſtupendas vita ſuperſtite, ſanguinis ex vno in aliud corpus transfuſionem, verbo, mille teſtes ſeu effectus ſolertiae iudicii, et intelligentiae ſummae, vt e diligentiore contemplatione Monſtrorum palam eſt.

Hinc itaque ex iam dictis, duce imprimis Anatome, qua videlicet tam matrem quam foetum, tametſi communi ſpatio incluſos ſeparatim absque mutuo nexu vaſorum, vitam ducere euincitur, perſpicere fas eſt, ad originem Monſtrorum explicandam, vim impreſſionesque phantaſiae vtero gerentium, ſine vllo veri fundamento aſſumi.

Sub finem tandem huius praefationis, aequi verique ſtudioſis illud perpendendum relinquo, an quae a Mulieribus Monſtrigeniis, de earumdem phantaſia, e curiuspiam obiecti deformis conſpectu vel auditu enata commemorantur, inter res ſatis exploratas? an potius, vt ego hactenus exiſtimo, inter errores populares ab Eruditis temere aſſumtos ſint collocanda? Nam nonnullas

mon-

monſtriparas ſerenitatem mentis haud interruptam retinuiſſe, alias vice verſa, in quarum imaginatione graues tumultus tempeſtatesque ac animi aegritudines, hincque foetus cauſſa, idaeae moleſtiſſimae ſuſcitabantur, prolem edidiſſe omnis labis et vitii expertem, haud vno exemplo, ac inter alia nouiſſimo, quod iam ſors obtulit, mihi compertum eſt.

§. 5. A parentibus hiſtoriae exordium ducentes, a militis praeſidiarii coniuge, iam vndecies vtero gerente, ac ſub ipſo partu fere ſpiritum cum ſanguine effundente, puer infelix brachiis mancus isque primogenitus, alterque ei ſociatus, ſed poſtremus ſeu poſterigenitus omnisque deformitatis expers, vitam lucemque acceperunt. Hic profecto, quia corpus placentae vtrique erat commune, mirari ſubit, cur tam dispari ſorte, vni ſolummodo, haud ambobus ſimul, vt praeſumendum erat, phantaſiae impreſſiones ſunt communes? Nam, quum e communis placentae radicibus, ambo funiculi vmbilicales erant contexti, quibus aequabili ratione vtriusque foetus nutritio perfici poſſet, aequum profecto eſſe videtur, vt ſimul in vtroque, matris impreſſiones aequaliter propagentur; Rem autem ſecus ſe habere, experientia teſtatur: ex quo iterum, aduerſus phantaſiae vires, in monſtrorum generatione, noua dubitatio exoritur. Caeterum, quonam grauiditatis tempore? ac vndenam eiusmodi deprauatio in altero foetu originem traxerit, num aliquando et quanam occaſione? quibusue circumſtantiis ſubito ac vehementius fuerit mens perturbata? ipſius denique matris de eiusmodi caſu iudicium, quibus praefata

fata dubitatio quantum fieri poteſt, explanari queat, percontatus: Deus, inquit, qui ſcit omnia, id ſolus nouit; ſe meminiſſe ſolummodo, prius quam vtero conciperet aeque ac vtero iam pleno, languore ſeu deiectione ſummae virium, interdum fuiſſe affectam, vnde cauſſa foetus brachiis mutilati forte deriuari debeat. Et iſta quoque, de cauſſis effectricibus monſtrorum, pro inſtituti noſtri ratione nunc ſufficere mihi viſa ſunt.

§. 6. Iam, vt ad Pueri Noſtri contemplationem deueniamus, quando corporis ſummum et nobiliſſimum ornamentum ei erat ademptum, videlicet vtrumque Brachium tam laeuum quam ſiniſtrum, hinc ſedes iſta vacua, plana, nudaque, in cuius centro papilla ſeu exigua verruca cute conflata, oblonga, grani tritici magnitudine ac mobilis erat conſpicua; et quia porro iſtiusmodi fabricae deſcriptio, a nemine quantum ſcio in lucem adhuc eſt edita, propterea hic ſubiicere primo Oſſa, 2. Muſculos, 3. Vaſa ſanguinea, ac denique 4. neruos, (quae profecto iis qui rerum cognitione delectantur fore gratiſſima confido,) duce Anatome haud abs re erit.

1. E tota compage oſſium, quorum numerus in vtroque brachio ad 86. eſt definitus, duo vtrinque ſunt poſita, cum tertii rudimento videlicet, os ſcapulae, os clauiculae, ac denique breue fragmentum, caput oſſis humeri mentiens ac ſcapulae ceruici accretum. Caeterum, poſitionem ſeu ſitum cum ſcapulae tum clauiculae, huiusque extremitatum connexionem cum acromio et

ſterno, poſtremo vtriusque conformationem, legitimam ac Naturae legibus accommodatam inuenimus.

2. Quum ſuper totum ambitum ſcapulae, plures inſignes muſculi a natura ſint dispoſiti, qui vel motui proprio ſcapulae, vel aliarum partium, maxime brachiorum motibus inſeruiunt, eorum muſculorum iactura hic profecto erat conſpicua, qui vno extremo ſcapulae, altero longius infra caput oſſis humeri implantantur, videlicet teretes, deltoideus, bicipites, coracobrachialis: Caeteri autem, qui in praefati capitis confinio terminantur, tametſi vt ſenſui apparet, vſus plane ſint expertes, omnes erant conſpicui, videlicet infrascapularis, ſupra ſpinatus, infra ſpinatus. Duo porro inſignes muſculi, pectoralis maior et latiſſimus dorſi, eiusdem inſertionis cum praememoratis erant participes. Quod denique, ad caeteros muſculos ſcapulae, brachii motibus haud inſeruientes ſpectat, eorum diligenti perluſtratione ac enumeratione inſtituta, nequaquam omiſſos, ſed vt in aliis hominibus poſitos eſſe animaduerti. Caeterum, propter frequentem varietatem in ortu Muſculi Coracohyoidei a Celeb. Anatomicis annotatam, hic ſilentio haud eſt praetermittendum, quod neque a proceſſu coracoide, neque a ſinu ei vicino, neque in vtriusque confinio, ſed ad angulum ſuperiorem et poſteriorem, eius ortus ſit manifeſto poſitus: ob quam cauſſam, inter eiusdem muſculi ortum et terminum, maiorem diſtantiam quam alias ſolet, hincque maiorem eius eſſe longitudinem galam eſt.

3. Ad

3. Ad vasa contemplanda ferebat praecipue animus idque haud immerito, quando quis expendit, flumina sanguinis, e corde per vasa insignia ad vtrumque brachium deducta, hinc per vasa haud minus ampla ad cor redeuntia, hic vero prorsus deleta, et, quod consequitur, ob iacturam brachiorum, in corde et caeteris vasis corporis multo abundantius suscepta, ac propterea vt ex sequentibus intelligere procliue erit, haud sine summo periculo versus alias partes deuoluta. Toto igitur tractu seu spatio cor inter et iuguli principium, conspectus vasorum Naturae legibus exacte respondebat, videlicet arteriarum, aeque ac venarum trunci et rami ac eorumdem ortus, incessus, numerus, conformatio et distributio, quae omnia, vt dixi, a corde vsque ad iuguli initium, cuiusuis deformitatis erant expertia. Iam a quo, vasa collo ac capiti propria, a subclauiis, vt moris est, discedere incipiunt, insolita mutatio spectaculumque nouum, consuetis legibus Naturae minime accommodatum, manifestari incipit; Nam postquam vnius fere lineae interuallo seu latitudine, ambo arteriae aeque ac venae subclauiae trunci, a consociis colli et capitis sunt digressi, subito gradum veluti sistentes, ac mirum in modum gracilescentes, viam longius prosequi desinunt, eoque deficiunt, quo alias in vasa axillaria propagantur. Ex aduerso, colli et capitis vasa proportionem aetati debitam excedentia, haud minus quam in adulto crassa et ampla sunt conspicua. Interim, quaecunque sit caussa istius inaequalitatis, eorumdem vasorum amplitudo, in laeuo, haud tanta est visa quam in dextro latere, quia vt opinor, arteriae carotidis nexus cum subclauia ad

istiusmodi augmentum est propensior. Extrema porro vasorum subclauiorum, omissis, vt iam annotaui, axillaribus, sn 5. 6ue exiliores et aequales arteriolas, ac totidem venulas immediate desinentia, hinc ad supra memoratos musculos breui itinere propagata, ibidem terminum assequuntur visumque effugiunt.

4. Post vasa sanguinea, ferebat quoque animus et neruos hic spectantes, eorumque conditiones pari diligentia persequi ac contemplari. Itaque, coniugationes neruorum ceruicalium tam superiores quam inferiores, haeque postraemae, ab exordio vsque ad earumdem per medium musculi scaleni eruptionem, a quantitate, ductu et conformatione ordinaria haud alienae, oculis sunt oblatae; Verum a praefata eruptione, earumdem pristinam formam, incessumue immutatum esse, iam procliue erat internoscere: nam similiter, vt vasa subclauia, gracilescere ac in exiliores chordas solitarias, simplices, inuicem haud implicatas aut irretitas commutari incipiunt, hinc praefatae chordae supra memoratis arteriolis venulisque intermixtae, nexu tamen mutuo (quo alias elegantissimo artificii genere nerui sunt implicati) carentes, ductu obliquo breuioreque versus costam superiorem scapulae separatim incedunt, ibidemque cum musculis supra memoratis iunctae, haud longius progredi obseruantur.

§. 7. Iam, quae de conditionibus et fabrica Monstrorum hic et alibi, (vid. Comment. Acad. Petrop. Tom. III.) a me sunt expo-sita, hinc excellentiam summumque ar-

tifi-

tificium, intellectum, et prouidentiam in iſtiusmodi operibus obuiam, quo animo expoſuerim, e praefatione ſatis intelligitur, videlicet, vt ſpirituum et phantaſiae vtero gerentium efficaciam impreſſionesque vltra quam par eſt haud exaltemus: Nam, ſi a perturbatione ac mutata indole ſpirituum interdum funeſti effectus ortum trahere poſſunt, haud propterea machinas vel organa exquiſitiſſima ab iisdem effici poſſe exiſtimandum eſt: In priore enim caſu ſolo impetu, in poſteriore autem cognitione opus eſt. In igne ex. gr. vis ineſt cauſtica, diſſoluens, in cineres ſeu puluerem redigens aedificia, ligna etc. aedificium vero aut lignum efficiendi facultate haud eſt praeditus. Hinc, quo res, per eiusdem Pueri de quo hic ſermo eſt, proprium exemplum, duce Anatome fiat clarior, potentia aeque ac impotentia ſpirituum in eo ſenſibus erat euidentiſſima, haec in mutilatione brachiorum, illa vero in funeſtis effectibus ac phaenomenis, in eiusdem Anatome nobis oblatis, quae propterea pro huiusce diſſertationis Coronide hic adiiciemus.

§. 8. Primo quidem, per dextrae cauitatis thoracis factam inciſionem, materiam ſeu aquam limpidam rubellam hic inuatare, et Pulmonem vndiquaque eſſe liberum: Ex aduerſo, in oppoſito latere pariter inciſo, cauitatem vacuam, pulmonemque coſtis, diaphragmati, et pericardio tenaciſſime agglutinatum, earundemque partium extimam ſuperficiem, plurimis tuberculis duris, flauo allicantibus, de quibus infra, exaſperatam obſeruauimus. Haec vero vt leuia et vulgaria, hic minus ſunt attendenda.

denda. Iam, dextrorsum inciso pericardio, vesicae instar inflato, pus saniemque in eo atrorubicundam, cuiusmodi sordibus cordis exterior superficies pariter erat inquinata, obseruare, hinc quando sinistri lateris pulmonem comprimebam, pus in pericardio accumulari, cum magna admiratione animaduertere coepi. Dum in eo essem, obseruo in opposita parte pericardii, in quo latere pulmo sinister ei nexu fere indissolubili erat agglutinatus, perforationem circularem magnitudine pisi, qua ad duorum digitorum profunditatem e cauo pericardii, in sinistri pulmonis lobum superiorem, stylus penetrabat, per quam viam e pulmone in cauum pericardii, vt dixi, puris exitus erat sensibus manifestus. Itaque, pulmonis a pleurae adhaerentiis, et eiusdem cum pericardio fere indissolubili nexu caute soluto, hinc pericardio ad latus inclinato, hiatum seu fossam ob pericardii nexum prius occultatam, haud sine horrore conspicio: Nam ea ad duos digitos profunda, et amplitudine imperialis ambitum exaequans, a medio et profundo praefati lobi superioris vsque ad tunicam extimam pariter exesam sese extendebat, inque praefatum pericardii foramen exitum habebat: vnde ea, pure substantiam pulmonis depascente et graueolente erat repleta. Eum autem in modum, ea corruptio inualuerat, vt maiores rami arteriae venaeque pulmonalis nudi iacerent, vt et minorum tubulorum fragmenta semierosa et vacillantia.

§. 9. Sed in praefatis, iisdemque vicinis, vt et quibusdam visceribus imi ventris, aliud aeque graue, hinc fere vniuersale, vitium erat obuium, ex quo quantum in vita maloruin, ante supremum diem Puero fuit perferen-

dum,

dum, intelligere haud difficile est, nempe toto tractu qui est a summitate vsque ad imum thoracis, tumorum partibus interiectorum, easque inuicem fere indissolubili nexu compingentium hincque in earumdem praeparatione, magnam difficultatem obiicientium, incredibilis copia oculis est oblata: Nam Iugulares, Bronchiales, Oesophageae, verbo, vniuersae Glandulae Oesophago, Tracheae, vasisque supra et infra pericardium sitis ac Canali Chylifero adsitae, per quas commemoratae partes iusto magis compressae inuicem erant conglutinatae: similiter omnes Glandulae lumbares, mesentericae, vt et sinistro orificio ventriculi, collo vesicae felleae, et spleni adsitae, induratae et ad magnitudinem nucis auellanae erant auctae. Perlustranti porro, pericardii cum lobo sinistro pulmonis, huiusque ad cauum eiusdem lateris concretionem, hinc adhaerentiarum istarum caussam perquirenti, super praefatarum partium, pleurae, costis ac septo transuerso super extensae, vt et super peritonaei, septum transuersum inuestientis ac postremo, super Lienis vniuersam superficiem, incredibilis copia consimilium tumorum oualium, durorum et caseosa materia graueolente infarctorum, sed cannabini seminis seu lentis magnitudinem haud excedentium est oblata. Hinc, speciem Glandularum referre, ac a praememoratis glandulis, mole et sede tantummodo discrepare, cumque istiusmodi corporibus conuenire videbantur, quae superiore seculo Summi Viri *Frid. Rhuyschius* et *Marcellus Malpighius*, hic quidem in Pericardio Pueri ac in alio homine, cuius *Pericardium absque humore ita arcte Cordi haerebat, vt aurisam secum raperet*

cor-

cordis ſubſtantiam et in ſingulis viſceribus (Pericardio et Corde) Glandulae miliares tartaro turgidae manifeſtabantur. vid. Epiſtola de Structura Glandularum conglob. Societati Regiae Anglicanae inſcripta A. 1688. Alter vero, ſub titulo Lienis grandinibus obſiti Theſ. IX. n. 55. a ſe obſeruata fuiſſe commemorant.

§. 10. Caeterum, ſi iſtiusmodi a *Malpighio* obſeruatis corporibus, tumores in noſtro Puero vere ſint ſimiles, hincque iisdem ſuperſtructa Doctrina haud commentitia, ſed vt Grauiſſimi Anatomici coniiciunt, veritati ſit maxime propenſa, rarum profecto ac perutile ſpectaculum hic nobis eſſe oblatum, nempe haud ſolum in Pericardio, vt et Pleura et Peritonaeo, (in quibus poſtremis partibus tametſi indagatae, haud tamen oculis conſpicuae Glandulae ſunt factae), ſed (quod nouum et praeclarum eſſet inuentum) in pulmonis exteriore integumento ſtructuram follicularem manifeſto patere fatendum eſſet: Cuiusmodi porro inuentum, coniecturae ſimul locum daret, exiſtentiae ſimilium Glandularum in omni viſcere, tam in medio quam imo ventre incluſo, quae ob ſuarum exilitatem et pellucidiatem oculorum aciem effugiunt, ſiquidem, vt pleurae et peritonaei textura e folliculis eſt conflata, ſic non ſolum Pulmonis et Lienis, ſed quoque Cordis, Diaphragmatis, Renum, Veſicae, Vteri, Teſticulorum in vtroque ſexu exteriorum membranarum quae Pleurae et peritonaei veras expanſiones eſſe creduntur, ſimilem ac communem texturam fore probabile eſt. Quia autem ea de re, duce *Rhuyſchio*, inter Grauiſſimos Anatomicos haud vna eſt ſententia, ego quidem Virum Celeb. ac ve-

veri ſtudioſiſſimum, magis quam multi exiſtimant, *Malpighianae* doctrinae fuiſſe propenſum, ac vel ſcinſcio ſub poſtremis vitae annis eius veritatem re ipſa agnouiſſe contendo, dum *Aduerſar. Anat. Dec.* 2. *Cap.* 3. de origine materiae quae in articulo genu pone patellam reperitur, hunc in modum differit. Cauſſa, inquit, quae opinioni de glanduloſa hic loci fabrica originem dedit, haec imprimis eſt; In vaſculoſo illo apparatu locantur vbique exigua membranacea receptacula, ſimilia iis, quae in inteſtino recto imprimis vt et inteſtinis tenuibus obſeruantur, quaeque verſatiſſimus in Anatomicis *Liſterus* donat nomine agminis glandularum. Circa receptacula haecce innumerabilia vaſcula ſanguifera, tela aranearum ſubtiliora atque decurſu omnino ſingulari diſpoſita videmus. Neque apparere haec vaſcula poſſunt, niſi prius cera rubra bene repleta fuerint, dein radiis ſolaribus recta allapſis in coelo ſereno, obſeruentur per oculos boni microſcopii adiumento vſos: vbi enim omnibus his beneficiis ſimul adhibitis non vteris fruſtra haec inquiſiueris.---Iam, quia iſtiusmodi receptacula re ipſa ſunt *Malpighiana*, propterea nullum diſcrimen eſt obuium inter *Malpighii*, ac inter modo expoſitam Glandulae Idaeam: Omnes enim ad veram ſtructuram glandulae pertinentes proprietates ſecundum *Malpighii* mentem, loc. cit. a Celeb. *Rhuyſchio* aſſumtas et deſignatas perſpicere procliue eſt. Quibus conſtat, Virum ingenuum verique Amantiſſimum ſub vltimo vitae termino ſeu decennio, opportunitatem eam nactum fuiſſe, qua vt ipſe *p.* 1. *Aduerſ. Anat. I.* fatetur, emendaret errata ſua Anatomica, quae ipſe forte in aliis ſuis olim ſcriptis commiſit. Quis nempe, in-

quit, mortalium omnibus ſe horis ſapere iactet? Quis ab errore immunis? de me, id vel cogitet, abſit! ſatis ſuperque vidi, atque dolui, hinc inde excidiſſe feſtino quae matureſcentis ſenii prudentia aliter dictata vellet, multumque referre, an iuuenili impetu efferantur quaedam, an vero ab Octogenario multos preſſa in annos prodeant ---- quia impoſſibile puto, ita bene ſubducta ad ſcripturam ratione eſſe, vt nihil poſtea vel ipſe corrigendum aeſtimet. Ipſe gaudebo ſane ſi quis in meis deprehenſa vitia in melius commutet. ---- Iam Vir Eximius in cit. exemplo fatetur a ſe viſa fuiſſe receptacula exigua, combinataque vaſculis innumeris, tela aranearum ſubtilioribus, quae ambo ſunt re ipſa proprietates verae eſſentialesque Glandularum ſecundum mentem *Malpighii*; Verum ex aduerſo, eiusmodi receptacula fatetur a ſe haud viſa fuiſſe in caeteris partibus vt in epidermide, in interioribus cauis cerebri, pleura, pericardio, peritonaei cauitate, teſtium tunica vaginali ac plurimis aliis partibus, tametſi earumdem vaſcula conſpexerit tantae tenuitatis, vt in ſtatu naturae ac poſt repletionem cera rubra factam, ſine radiorum ſolarium ac microſcopiorum optimorum luce eſſent plane inconſpicua. Cur vero hic vaſa ſeparatim? Cur non aeque vaſa et receptacula ſimul combinata vt in priori exemplo? Priusquam reſpondeam, cur quaeſo in multis partibus, in ſtatu naturae alia vaſa ſunt conſpicua, alia vero eorumque pars maxima vt ipſemet *Rhuyſchius* fatetur, ſunt inconſpicua, donec vel cauſſis fortuitis vel ſolertia Anatomicorum ſiunt ſenſibus obuia. Ergo, vt vaſcula dantur ineffabilis tenuitatis, quae tametſi vero exiſtant

sant multis in locis sunt inconspicua, similiter in compage admiranda Animalium intelligitur, non solum vascula omnis generis, vt dictum est, contineri; Verum varia corpuscula esse posita tam indole quam magnitudine discrepantia, quaedam acie oculorum conspicua, quaedam vero ob incredibilem tenuitatem aut pelluciditatem, aut situm profundiorem sensibus inconspicua, interdum tamen fortuito vel alia quacunque causa reuelanda.

§. 11. Quare, vt ad quaesitum respondeam, tametsi proprietates syphonis sint profecto admirandae, propterea tamen ex effectu in vasa vniuersa, inque eorum ramusculos et contextus subtilissimos, haud consequi effectum communem ac vniuersalem, nempe claram et absolutam demonstrationem texturae ac varietatis particularum ad eam spectantium, minus mirandum est: Nam 1. quando vascula minima tametsi sint distenta, aciem oculorum eludunt, aliae vero machinulae, siue nudae, siue annexae vasis minimis, siue non, e substantia fluidae aemula sunt conflatae, num a cerae vel cuiusuis materiae in vasa iniectione, eas visus aciem effugere mirum est? 2. Quando ante iniectionem, earum moles vascula aequaret, si per iniectionem omnes ramuli minimi distenduntur, quanto iniectio est perfectior, molesque vasculorum auctior et conspectior, tanto exilior moles difficiliorque conspectus machinularum efficitur: Nam, quum earum fabrica sit tenerrima, facile intelligitur, a praefata distensione vasculorum earumdem resistentiam quae est minima, vinci, hinc coarctationem ac denique molis decrementum consequi: vnde patet, ad inuestiganda Naturae arcana, iniectionibus haud vltra, quam par est, tribuendum esse.

DE CORDIBVS VILLOSIS.

AVTORE
Joſ. Weitbrecht.

§. 1.

ADmirandi huius et rari inter cordis affectus phaenomeni primo hiſtoriam dabo; deinde in cauſſas eius, quantum in rē obſcura licet, inquiram.

§. 2. Menſis Auguſti die vigeſimo primo, 1731. cum in ſectione cadaueris remigis alicuius occupatus eſſem, qui ex vlcere profundo pulmonis ſiniſtri vsque ad exteriora integumenta penetrantis deceſſerat, habitum cordis externum ſingulari quodam ac miro inuolucro inueſtitum deprehendi. Erat enim materia quaedam ad ſenſum, lardoſa; hic tenuis ibi craſſa, albicans, tenax, vbique decuſſatim quaſi inciſa, et in crenas diuiſa, vt villos paruos, varios, longiores et breuiores, rotundos, quadrangulares referret, quae non ſolum ſuperficiei cordis exteriori et adiacentis pericardii parieti toti ſuperinducta erat, ſed etiam in omnes ſinus inter vaſa e corde egredientia, imo ſuper vaſa ipſa, quantum in cauitate pericardii continentur, penetrauerat. Poterat haec materia, tamquam membrana continua vbique detrahi, vt cor et pericardium in ſtatu, qualis naturalis eſſe ſolet, relinquerentur: quippe in aliquibus locis laxius, in aliis autem, et imprimis in illis locis, vbi ſub membrana cordis pinguedo transparebat, ſubſtantia tenuior, et paucior tenacius adhaereſcebat.

§. 3.

§. 3. Non ita multo poſt in alio cadauere inuolucrum ſimile detexi, quod et in Conuentu Academico in conſpectum produxi, in quo autem villi non adeo magni adhaerebant, vtpote cor cum pericardio aliquibus in locis concretum erat.

§. 4. Simile velamentum autem, tertia denique vice, Menſe Februario 1732 in cadauere agnatae alicuius, vna cum Cl. Dn. *D. Du Vernoi* non ſine ſtupore intuitus ſum. Erant autem hic omnia inſigniora; materia lardoſa non in villos ſimplices vagantes diuidebatur, ſed in columnas omnino craſſas, imaginem columnarum maximarum in ſinibus cordis referentes, colore et conſiſtentia polyporum aemula, quae tamquam trabes ex cordis lateribus verſus pericardium extenſae, huic accreuerant, atque ita cohaeſionem cordis cum pericardio ſtabiliuerant. Laborauerat defuncta haec Virgo viginti annorum vltimis vitae temporibus obſtructione menſium, quorum fluxus irreuocabilis erat; acceſſerant, difficilis reſpiratio, tuſſicula, febricula vaga, dolores pungitiui circa ſcapulas, anxietas, appetitus proſtratus, tumor pedum, donec tandem repentina ventriculi inflammatio, cum ſubſequente vomituritione, et ſubitanea denique ſuffocatione miſeriae finem impoſuiſſet. Praeter phaenomenon autem ſupra memoratum aderat hydrops pectoris in dextra imprimis thoracis cauitate; et in pulmonis ſubſtantia, praeter varios duros nodos, oſſiculum quoque rotundiuſculum, ſcabroſum, pi.i maximi magnitudine innatum.

§. 5. Prima quaeſtio, quae ſub phaenomeni huius conſideratione, eruenda occurrit, ſine dubio haec eſt:

qualesnam et cuius naturae ſint tales excreſcentiae? Ad quam vt cum aliqua veriſimilitudine reſpondeamus, ad experimenta adtendendum eſſe putem, quae cum hac materia inſtitui.

§. 6. Portionem huius materiae in aqua ſimplici macerani; in qua putreſcere, foetere, et in mucilaginem denique, quemadmodum aliae partes animalium non pinguedinoſae, fatiſcere coepit. Portionem aliam in aqua ſimplici coxi, quae in ſubſtantiam multo tenaciorem ac membranaceam coaluit, atque ſpeciem coaguli ſubalbidi induit. Aliam denique portionem in lamina ferrea igni aperto impoſui, vnde in ſubſtantiam duram, et fragilem exaruit. In his variis examinum modis nullum pinguedinis veſtigium apparuit. Cum vero eadem haec phaenomena in ipſo fero ſanguinis humani deprehendantur, neque vllum ſimile fluidum in corpore humano exiſtat: concludendum omnino eſt, hanc materiam non pinguedinem eſſe, ſed genuinam ſeri ipſius progeniem.

§. 7. De poſſibilitate ſeparationis materiae talis ſeroſae nullatenus eſt dubitandum. Namque in ſanguine animali ſerum cum globulis rubris adeo laxe cohaeret, vt nonniſi ſola quiete opus ſit ad reſolutionem huius humoris vitalis in iſtas duas partes integrantes. Docet id quaeuis venae ſectio. Imo ne tenacior quidem ſeri pars cum rubra aequabiliter miſta manet, ſed tamquam cruſta membranacea placentam rubram ſeparatim obtegit, quemadmodum in pleuriticorum ſanguine emiſſo luculenter videre eſt. Denique ipſa polyporum natura, qui, non ob-

obstante perpetuo sanguinis traiectu in interna cordis cauitate nascuntur, serum sanguinis a rubris partibus diuelli posse, abunde satis testatur.

§. 8. Tales autem excrescentiae serosae (§. 2. 3. 4.) non in cordibus solis inueniuntur, sed experientia docet, in aliis quoque corporis regionibus saepenumero existere. Ita e. gr. Cl. *D. Du Vernoi* noster multiplici obseruatione didicit, intestinorum gyros imprimis per materiam talem serosam et glutinosam, et in membranae speciem incrassatam ita sibi coalescere, vt quasi connatae videantur, atque aegre a se inuicem diuelli patiantur. Neque ab hoc loco alienum mihi videtur, aliud exemplum commemorare, quod in cadauere rustici cuiusdam A. 1729. oculis meis se obtulit. Huius pectus cum aperirem, latus eius sinistrum aqua lividula plenum erat: vix enim vna aut altera costa a sterno soluta, statim illa per rimas prorupit. Ablato autem sterno, hoc se exhibuit phaenomenon: Pulmonis dextri lobus ille, qui inter duos, aut interdum tres, maximus est, qua sternum et costarum cartilagines adiacet, obductus erat materia quadam ex albo flauescente, tamquam membrana, vigesimam circiter pollicis partem crassa. Abrasi digitis, collegi in vasculum. Adstitit spectator Cl. *D. Gmelin.* Postridie examinauimus aqua et igne. Cum aquam iniecta coquerétur: deprehendimus parumquid pinguedinis in superficie aquae natantis, quae vero a digitis inter secandum vaginosis factis, queis colligebatur, facile affricari poterat. Reliqua materia in membranam concrescebat tenacem, talem, qualem ex sero sanguinis con-

fectam

fectam Cel. *Ruyſchius* in Theſauris ſuis exhibet. Quo magis coquebamus, eo tenacior euadebat. Poſt elixationem in lamina ferrea igni aperto impoſuimus, vnde tandem adeo induruit, vt in puluerem potuiſſet redigi. Partem huius materiae, absque praeuia elixatione, methodo vltimo commemorata examinauimus, quo factum eſt, vt antequam in membranam et tandem in ſubſtantiam duram conuerteretur, multae bullulae aereae excitarentur, quarum vero paucae, propter materiae tenacitatem, pelliculam ſuam disrumpere poterant, vt igitur aer ſolummodo ſenſim exhalare cogeretur. Ceterum pulmo dexter valde durus erat, ſed aequabiliter et ſine nodis ſparſis; itemque ſolito maior, ſiquidem propemodum duplo plus ponderabat quam ſiniſter.

§. 9. Si de modo formali quaeras, quo excreſcentiae tales ſeroſae ſeparari atque excerni poſſint, duo potiſſimum probabiles eſſe videntur; aut enim ex vaporibus, qui ex omnibus viſceribus continuo exhalant, illae generantur, aut ex ipſis viſceribus ſub forma non vaporoſa ſed craſſiore et fluida expreſſae transſudant: quibus etiam lympha pericardii, ſi de cordibus villoſis in ſpecie ſermo eſt, tamquam materia proxima annumerari poteſt.

§. 10. Quod ad vapores attinet, illi quidem generaliter negari non poſſunt: ſed in vagis illorum exhalationibus nulla ratio ſufficiens deprehenditur, quare tales materiae non vbique in tota aliqua corporis cauitate, ſed tantummodo e. gr. in hoc praeciſe lobo pulmonis et non in alio proxime vicino detegantur. Cauſſa

tertia

tertia locum quidem habere posse videretur, quando de cordis excrescentiis solis quaestio esset; haec vero aliis phaenomenis a pericardio remotioribus explicandis minime sufficeret, nisi similem vaporum condensationem in massam liquidam (qualis in pericardii sinu constans est) tam in pectore quam in abdomine supponere velles. Quamuis autem talis suppositio per experientiam quodammodo roborata videatur, dum quam saepissime accidat, vt in istis regionibus aliqua serositas hinc inde diffluat, tamen exinde non sequitur, cur plana superficies pulmonalis lobi alicuius, cur intestinorum gyri variis directionibus inflexi tali membrana obducantur? cum potius illa, si quidem post euaporationem sensim incrassaretur, vi grauitatis planitiei diaphragmatis incumbere, aut in peluis cauitate delitescere deberet. Sola igitur transsudatio specifica determinata in illis visceribus, super quibus tales excrescentiae expanduntur, restat, ad quam in horum phaenomenorum explicatione confugiendum esse putem; quo vocabulo humoris serosi violentam extra vasa circulatoria expressionem per poros superficiei visceris intellectam velim.

§. 11. Vt vero in corde et pulmonibus materiam talem serosam glutinosam et compactam per transsudationem obtineamus: primo vis aliqua adesse debet, a qua ista expressio extraordinaria proficisci potest; deinde materia huius naturae sit oportet, vt, postquam separata est, an formam consistentem et quodammodo solidam abeat, non autem liquida permaneat.

§. 12. Vis illa eſt ipſe motus cordis ſolito vehementior auctus propter impeditum ſanguinis traiectum per pulmones ex vitio huius organi, quem immediate comitatur intenſior ſolito reſpiratio. Intelligimus enim, in exemplis ſupra allegatis ſemper adfuiſſe reſpirationis difficultatem et pulmonum thoracisue laeſionem. Res autem experientiae eſt, quo magis tranſitus ſanguinis per pulmones impeditur, eo maioribus agitationibus cordis ventriculos contra niti, eoque celeriorem et magis anhelam reſpirationem fieri, quae ſemper maiorem infarctum ſanguinis tam in corde quam in pulmonibus, expanſionem et dilatationem horum viſcerum, texturae raritatem, pororumque minimorum hiatus apertiores inuoluit, vt ſerum forma paullo craſſiori, quam quae in vaporibus et transſpiratione inſenſibili conſpicitur, exprimi poſſit.

§. 13. Sed ad conſiſtentiam et fluiditatis iacturam non ſufficit ſola ſeri extravaſatio et ſecretio. Videmus enim in ſanguine venarum emiſſo, ſeparari quidem quieſcendo, ſed fluiditatem ſuam non omnem amittere. Alia igitur cauſſa in auxilium aduocanda eſt, quam in aucto caloris naturalis gradu inuenimus. Notum eſt, examina ſeri aliorumque liquorum ipſi agnatorum, e. gr. albuminis oui, nos docere, quod, cum in diuerſis caloris gradibus detineantur, ſub habitu etiam longe diuerſo appareant. Imprimis vero ſerum non coit in coagulum niſi in aqua calidiſſima; in tepida autem tantummodo putreſcit. Vtriusque obſeruationis exempla corpus quoque animale exhibet. Hoc enim clare apparet in abſceſſibus purulentis

lentis atque ichoroſis, qui originem ſuam ſero extrauaſato et in quiete conſtituto, ab ambientium autem partium calore foto acceptam debent. Alterum vero colligendum eſt partim ex conſiſtentia polyporum in corde, partim ex cruſta inflammatoria in ſanguine pleuriticorum, aliorumque febribus ardentibus laborantium, in quibus ob exceſſiuum ſanguinis aeſtum iam pars aliqua ſeri ad coagulationem eſt diſpoſita, quae mox conſequitur vbi primum quies acceſſerit.

§. 14. Cum igitur in corporibus iſtis, quae tales lymphae coagulatae extrauaſationes nobis exhibent, ante mortem plerumque adfuerint ſequentia phaenomena: motus cordis vehementiores, anxietates, febricula, reſpiratio difficilis, pulmo laeſus: ſequitur neceſſario, etiam calorem ſanguinis vltra modum augeri debuiſſe. At vero auctus calor ſeri partes aquoſas, tenuiores diſſipat, fluiditatem eius minuit, glutinoſitatem auget, illudque ad coagulationem disponit, quemadmodum §. 13. demonſtrauimus. Ratio igitur ſufficiens patet, quare in iſtiusmodi pectoris affectibus ſerum expreſſum et eſudans in ſpiſſiorem conſiſtentiam reducatur. In cordibus autem ſub villorum ſeu lacertorum craſſiorum ſpecie apparet, propterea, quia motus cordis tumultuoſior eſt et magis vagabundus, vnde ſerum augmentis magis irregularibus accreſcit, quam in pulmonibus, quae inter reſpirandum aequabilius explicantur atque contrahuntur.

DE CIRCVLATIONE SANGVINIS

COGITATIONES PHYSIOLOGICAE.

AVTORE

Joſ. Weitbrecht.

Cap. I.

Modi Circulationis Conſiderationes quaedam generales.

§. 1.

MOtus perpetuus ſanguinis e cauitate cordis ſiniſtra egreſſi, per arterias in venas transeuntis, inde in cor dextrum redeuntis, hinc per pulmones ad ſcaturiginem ſuam relabentis, nouoque curſui ſe ſiſtentis, in genere Circulatio ſanguinis dici ſolet.

§. 2. Grauiſſima haec veritas *Haveiana* a primo non ſolum inuentore ſuo, ſed et poſtmodum a *Pecqueto* aliisque, adeo indubitatis experimentis confirmata eſt, vt reuera talem motum in corpore animali exiſtere, lippis hodie ac tonſoribus notum ſit.

§. 3. Qualis autem ſit ille *motus*, quibus *legibus* abſoluatur, quae *vires*, quae illarum *quantitas* et qui *effectus*? id vero eſt, in quo aſſignando multi doctiſſimorum virorum, Itali potiſſimum, atque Angli deſudarunt. Neque tamen in hoc opere ita progreſſi ſunt, quin plurima nondum determinata, multa partim incon-

congrue, partim falso, partim contradictorie dicta, pauciſſima ad menſuras redacta nobis reliquerint; quamuis non tam ſcrutatorum attentio, quam rerum potius multitudo et perplexitas hactenus accuſanda venirent.

§. 4. Quapropter ad haec omnia indaganda dum animum appelleremus, haud parum profuturum eſſe nobis intelleximus, ſi, quae neceſſaria ſunt, a minus neceſſariis caute diſtinxerimus, ne ad omnia ſimul attendendo intricatiſſimis quaeſtionibus iisque inutilibus implicaremur. In conſiderando igitur motu ſanguinis e re noſtra erit, vt, quae de eius natura et conſtitutione, de viribus cordis earumque principio et quantitate, de proportione vaſorum inter ſe illorumque directione, de communicatione illorum determinata dici poſſunt, tantisper ſeponamus, et generalibus harum rerum notionibus contenti, ſimplicem naturae laborem oculis patienter intuentibus proſequamur.

§. 5. *Sanguinis* nomine humorem rubrum in animalium corde ac vaſis adhaerentibus contentum ac fluentem intelligimus; et illum quidem talem, qualem nudis oculis conſpicimus, quibuscunque ille particulis homogeneis heterogeneisue conſtiterit.

§. 6. Maſſa haec ſanguinea cum omnibus corporibus hoc commune habet, quod ſit impenetrabilis, et hinc omne aliud corpus ex loco a ſe occupato excludat; quod ſit mobilis ac figurabilis, hinc de loco in locum transferri, ac in varias figuras disponi poſſit. Cumque partes eius impreſſioni cuique cedant, et cedendo facillime inter ſe moueantur; fluidi nomen, et ſimul affectiones omnes fluido competentes nemo iſti denegauerit.

§. 7. Praeterea tamquam veritatem indubitatam experimentis ſuis roboratam ſupponimus: ventriculos cordis contractione ſua, ſanguinem in vaſa ſeu canales quosdam ſibi accretos et congruos exprimere; cuius *contractionis* atque expreſſionis idea ideam *vis cordis* comprehendimus, quae praeſenti inſtituto ſufficit. Contractionem cordis cum *Harueo ſyſtolem* nonnumquam dicemus; ille vero cordis ſtatus, qui inter duas contractiones medius eſt, nobis *Diaſtole* erit.

§. 8. Qui circulatione ſanguinis adſtruenda occupantur, canales, per quos ſanguis mouetur, tamquam duplicis generis vaſa nobis exhibent. Harum alia ſanguinem a corde abducunt, et ex trunco in ramos imaginatione omni ſubtiliores diuiduntur: alia ſanguinem ſimilibus tenerrimis ſtaminibus recipiunt ac per truncorum ſuorum meatus iterum in cor deponunt. Illa vocari *arteriae*, haec *venae* ſolent.

§. 9. *Canales*, per quorum cauitates hoc noſtrum fluidum (§. 6.) mouetur, ex corporibus eiusmodi conflati ſunt, quae data vi extendi ſine rupturae metu poſſunt, atque iterum reſtituuntur ſublata iſta vi aut ſuperata, ſiue, quae *elaſtica* ſunt. Cum igitur ſanguis in canalibus contentus continuam in latera illorum preſſionem exerceat, et vaſa extendere annitatur, vi fluiditatis ſuae (*Graueſand. Inſtit.* §. 328.): preſſione hac aucta vel minuta, ceteris paribus, maior vel minor canalium capacitas exſurgere poteſt.

§. 10.

§. 10. Premat ſanguis in canalium latera circumquaque: contranitantur canales elaſticitate ſua, ita vt tota ſanguinis preſſio conſumatur reactione laterum vincenda, et viciſſim toti laterum niſui reſiſtat: ſcilicet ſint vires preſſionis atque elateris aequales; ita vt nulla ſequatur canalium dilatatio aut anguſtatio, vt proinde diameter capacitatis ſit per aliquod tempus eadem, et fluidum quieſcat: in hoc caſu ſanguis et canalium latera ita ſe inuicem arcte tangent, vt nullum aſſignari ſpatium ſenſibile poſſit, materie vacuum: ſine canales iſti tum erunt pleni. Iam augeatur preſſio fluidi, vi vndecunque accedente, et vincat reſiſtentiam laterum, vt maior canalis capacitas oriatur (§. 9.): erit adhuc dum plenitudo, et vacui exilium. Superet vero canalium elaſticitas preſſionem liquidi, et capacitas illorum minuatur: ne ſic quidem ſpatium relinquetur vacuum, ſed omnia erunt plena.

§. 11. Apparet, ſequi haec omnia (§. 10.) ex idea elaſticitatis et fluiditatis (§. 9. 6.): Neque tamen ea ita vera ſunt, quin cautionibus quibusdam opus ſit. Videlicet ſupponimus, haec ita fieri in corpore ſano et viuo, in quo ſemper determinata et ſufficiens quantitas ſanguinis requiritur. Poteſt enim haec ita diminui, vt actionem nullam laterum ſeſe contrahentium amplius patiatur: Tum vero nec viuum aut ſanum corpus erit. Deinde nimis illi praecipites mihi videntur, qui poſtquam non dari vacuum in canalibus euicerunt, eo ipſo ſanguine illos plenos eſſe concludunt. Illos autem demonſtrare antea oportet, nullum aliud peregrinum corpus in canalibus deprehendi praeter ſanguinem:

id

id quod aliqua ex parte praeſtitit *Dominicus Guilielmini*, qui a poſteriori, vt Logici dicere amant, oſtendit, quasnas turbas aliena corpora, tam ſolida, quam fluida, modo cum ſanguine non miſcibilia in negotio vitae excitent, et exinde neceſſariam ſanguinis continuitatem adſtruxit. Vaſa igitur dicta ſanguine plena eſſe audacter licebit dicere.

§. 12. Quia ſanguinis ex arteriis in venas (§. 1. 8.) eſt *transitus*: vaſa haec duo inter ſe cohaerere extremitatibus ſuis, neceſſe eſt. Qualiscunque autem haec ſit *cohaeſio*, hactenus nobis perinde erit: cum illius ignoratio praeſenti conſiderationi nihil officiat.

§. 13. Tota igitur via, quam ſanguis emetiri debet, antequam ad ſcaturiginem ſuam redeat, eſt longitudo arteriarum et venarum (§. 12.), quae pro varia viſcerum a corde diſtantia ſimiliter varia eſt.

§. 14. Numquam tota illa ſanguinis maſſa ex corde in arterias proiecta, per venas illibata redit, ſed quaedam illius particulae e corpore penitus eliminantur, quaedam ita immutantur, vt ſuis ſpecificis vaſis latae per totum corpus oberrent, donec in viam regiam denuo relabantur. Ne igitur nimium oneris nobismet ipſis imponamus: ſcrutabimur ſolummodo, quid ſanguini accidat, donec a corde per arterias ad horum extrema minutiſſima, vbi transitus in alia vaſa incipit, peruenerit; reliquos canales et ductus tamquam vas aliquod commune conſideraturi, in quod arteriae liquorem ſuum effundant.

§. 15. Vbi primum igitur Cor actionem ſuam exercere incipit, maſſa ſanguinea, quam hactenus intra

vaſa

vaſa *quiete* deliteſcentem ſupponimus, impetum Cordis ſuſtinere cogitur. Locus autem, vbi prima percuſſio accidit, circa *principium* e. gr. aortae ipſum (de arteria enim pulmonali deinde dicemus), cui valuulae ſemilunares applantatae ſunt, quaerendus eſſe mihi videtur. Cum enim vaſa omnia plena (§. 10. 11.) ſint, ſanguis autem quaquauerſum (§. 6.) premat: valuulae iſtae vi ſtructurae ſuae arctiſſime ſibi apprimuntur, ita, vt cylindri arterioſi ex corde proxime aſcendentis quaſi *baſin* efficiant, omnemque inter fluidum cordis et arteriae communionem tollant. *Pulſus* igitur e ſiniſtro cordis cauo *ſanguis* ad compreſſas valuulas allabitur, quarum *impetus* conceptus cum accumbente *ſanguine* arterioſo extemplo communicatur.

§. 16. Impetus autem iſte ſanguini a corde impreſſus *minime ſufficit*, vt motus inde vllus *actu* ſequatur, niſi ille *tantus* fuerit, vt *viam* ſibi inter valuularum rimas aperire poſſit; id eſt, vt appreſſae ſibi valuulae ab inuicem *discedant*, atque aortae lateribus admoueantur. Cum enim et ſanguini ſua ſit vis inertiae, et vaſa non a quouis minimo impetu extendi ſe patiantur: aorta *elaſtica* ſanguinis molem tamdiu ſuis limitibus priſtinis coërcitam retinet, donec vtraque a vi cordis ſuperentur.

§. 17. Poſtquam *patefacta* (§. 16.) via eſt: vt ſanguis *nouus* a corde proiectus *intra aortae* cancellos recipiatur, *vetus* ſanguis nouo *tantum* ſpatii concedere debet, *quantum* ad aſſeruandum illius volumen ſufficit;

plena enim omnia ſunt et impenetrabilia (§. 6. 10.). Cum vero hac noui voluminis additione quantitas maſſae ſanguineae prior in arteriis augeatur, vt in *eodem ſpatio* contineri non poſſit: haec ipſa in *alios ſeceſſus* deturbata promouetur. Loca autem, in quae vetus ſanguis abiturit, non niſi *duo* eſſe poſſunt. *Aut* enim oportet, vt vaſa *maiorem capacitatem* nanciſcantur; atque ita ille *intra* arterias *adhuc dum* detinebitur: *aut* poſita capacitate *priſtina non* ampliata *quantitas* ſanguinis intra arterias *denuo minui* ac portio quaedam *aliorſum* extra illas *dilabi* debet. *Vtramque* autem *viam* a natura ipſa adhiberi, et in ſubſidium vocari *experientia* et *ratione* liquidiſſime euincitur.

§. 18. Locus igitur *alter* (§. 17.) quo ſanguis vetus ab appellente nouo protruditur, ſunt *arteriae* ipſae *dilatatae* eo vsque, dum proiecta portio *ſpatium ſufficiens* nacta fuerit. Solemus hanc dilatationem quadantenus tactu ac viſu dignoſcere, ac pulſus nomine plerumque indigitare. Docent obſeruationes Harueianae, *contractionem* cordis et aortae *dilatationem* fieri *eodem* momento: quando autem ſanguis *extra* arterias ſe *propripiat*; id quidem experimentis non aeque plane conſtat.

§. 19. Haec arteriarum dilatatio (§. 18.), ſanguinis aucta preſſio in illarum latera, valuularum eleuatio, dependet ab *impetu* ſanguinis (§. 16.); Impetus autem huius ab *actione cordis* (§. 15.). Quo *maior* igitur eſt haec *actio*, eo *maior* etiam eſt *impetus*; hinc *latior* apertura intra valuularum *rimas*, et hae ipſae propius ad aortae latera apprimuntur. Cum vero actio cordis ſit

tempo-

temporanea: neceſſario, ceſſatura *cauſſa*, impetus ſanguinis quoque et omnia reliqua phaenomena, tamquam *effectus*, aliquando ſimul ceſſabunt.

§. 20. Finge iam actionem cordis *finitam*, et ventriculum ſiniſtrum penitus depletum eſſe: dico, valuulas retropreſſas (§. 16.) iterum collabi, et *communionem* inter aortam ac ventriculum cordis denuo *tolli* debere. Id enim niſi fieret, *nulla* eſſet *ratio*, quare columna in aorta ſupra valuulas conſtituta, *non* iterum *deſcenderet*, et ſpatium priſtinum euacuatum occuparet, atque ita *circulatio* ſuppoſita plane *abrumperetur*. Sed et cauſſas collapſus videamus.

§. 21. Quia corpora *elaſtica* dilatata nituntur in ſui reſtitutionem ac contractionem: haec omnia etiam arteriis (§. 9.) accidunt. Non autem contractio actu fieri, niſi ſublatis viribus *dilatantibus*, poterit, quae ſunt, partim *impetus* ſanguinis irruentis (§. 16.); partim illius aucta *quantitas*. Cum igitur actio cordis temporanea ſit, illa ceſſante (§. 20.) virium dictarum *altera* tollitur, et dilatationi arteriarum vlteriori *terminus* ſigitur. Neque minus ſanguis ipſe naturam ſuam (§. 6.) numquam exuit, ſed continuo quaqua vorſum *premit*, et quidem eo *fortius* illuc, vbi *minus* eſt reſiſtentiae. Fac iam conſtricto ventriculo cordis ac depleto *valuulas* per momentum *apertas* manere, ac *columnam* ſanguinis in aorta ſupra valuulas haerere *immotam*: ſpatium *vacuum* aderit tantum, quantum eſt interuallum inter valuulas apertas, inter limites ventriculi et columnam ſanguineam nominatam comprehenſum. Vbi autem vacuum eſt, ibi reſiſtentia eſt nulla. Cum igitur non ſolum *im-*

petus ſanguinis ex corde in latera valuularum *ſublatus* ſit, ex hypotheſi, ſed et praeterea *vacuum* obortum ſit, vt nihil reſtet, quod valuulas vlterius retroprimere poſſit: ſequitur *ſanguinem* intra aortam ac valuulas contentum *vim* ſuam preſſoriam in *valuulas* potius quam aortam exercere, valuulas ergo iterum ſibi apprimi, appreſſis autem valuulis ſanguinem allabi. Cedenti autem ſangaini, in reſtitutionem ſui *nitenti* arteriae latera a tergo inſequuntur, ſeſe *actu* contrahunt, et valuularum arctiſſimam *occluſionem* adiuuant.

§. 22. Credo diſtinctius haec (§. 15. 16. 20. 21.) ob oculos poni Lectori poſſe *lineis* et *figuris*.

Sint enim AB et CB *valuulae* (quas ob ſimplicitatem duas fingimus) in B ſibi accumbentes, quibus *columna* ſanguinea intra aortam FABCGF, ex vno latere inſiſtens quieſcit. Agat iam cor, et ſanguinem proiiciat ex ventriculo ACDE, verſus latus alterum valuularum. Si impetus hic a corde factus vincit preſſionem columnae ſanguineae ſuperincumbentis FABCGF; tunc eleuabuntur valuulae, et venient in ſitum talem, altera AB ſcilicet, in AH; altera CB in KC; et apertura erit HK. Per hanc *aperturam* ſanguis ex corde proiectus viam ſibi quaerit. Columna igitur dicta proiecto nouo ſanguini cedens aortam dilatat; atque in ſitum altiorem pro differentia altitudinum ABC et HK, eleuatur: preſſio autem ipſius columnae in valuularum latera, vtpote nunc minus inclinata, diminuitur. Ceſſet actio cordis: tunc valuulae

AH

AH, CK, nullum amplius impetum ſuſtinent; columnae igitur ſanguineae preſſio in valuulas, etſi prius imminuta, tamen ceſſante cordis impetu infinita euadit. Si iam ſanguinis columna FAHKCGF immobilis maneret per momentum, valuulis aut in AH, et CK haerentibus, aut proprio pondere in ſitum priſtinum ABC, relabentibus: neceſſario vacuum adforet tantum, quantum eſt ſpatium AHKCBA, et capacitas ventriculi ABCEDA: In vtroque igitur caſu ſanguinis columna premens infinita vi, verſus vacuum non reſiſtens vna et ſimul cum valuulis ad altitudinem *priſtinam* ABC deſcendit. Deſcendente autem columna, illius preſſio in aortae latera AF, et CG diminuitur: haec igitur latera contranitentia iterum reſtituuntur, et *appreſſionem* valuularum adiuuant, atque arctiorem efficiunt.

§. 23. Sint iam omnia, *vti ab initio* (§. 15.), quieſcat ſanguis, atque ab arteriis vbique plenis comprimatur. Incipiat autem *denuo* agere cor, et portionem ſanguinis *nouam* verſus aortam proiicere: facile apparet, fore quidem, vt ea omnia *eodem ordine* accidant, quo §is 15—22. decripſimus: verum, cum quouis iterato cordis ictu, quantitas maſſae ſanguineae in arteriis noua portione augeretur, tandemque in infinitum creſceret; fibrae etiam vaſorum eo magis extenderentur; ſed et eo fortius reſiſterent: ſequitur, *aut* vim cordis tandem ad motum continuandum *non ſuffecturam*, *aut*, ſi et in infinitum augeretur, canales ipſos, vtpote vbique tamquam obturatos, cum vitae diſpendio *deſtructum* ruptumue iri. Quapropter ad vitam requiſita motus huius *perenni-*

nitas eruptionem ſanguinis extra arteriarum alueos per vias legitimas indiſpenſabili *vrget* neceſſitate. Cum vero valuulae ſemilunares omnem in cordis caua *receſſum* (§. 20.) ſanguini *denegent*, idque eo magis, quo fortius hic ab arteriis ſe reſtituentibus apprimitur (§. 21.22.): quicquid ſuperfluum eſt, id omne per arteriarum extremitates *alteras* (§. 17.) cogetur effluere. Hae enim illa *emiſſaria* ſunt, quae in alterius generis vaſa (§. 14.) cum quorum primordiis (§. 7.) cohaerent (§. 12.), liquorem ſuum transfundunt.

§. 24. Quamdiu igitur incolumis ac *naturalis* ſanguinis motus perennat: tamdiu etiam *quauis proiectione ex corde facta tantundem praeciſe ſanguinis per extremarum arteriolarum orificia in exteros alueos tranſit*; *quantum ex corde intra aortae terminos fuit receptum.* Hunc motum ſanguinis naturalem voco *aequabilem*; non, quod ſanguis quocunque vaſorum *loco* aequabiliter moueatur, ſed quod *interuallo* duarum actionum cordis *tantum* arteriis exeat, *quantum* illas intrauit, *quacunque* id *celeritate* fiat. Dico autem *praeciſe tantundem* exterminari in ſtatu *naturali*. Quodſi enim *minor* quantitas elaberetur: *congeſta* ſanguinis *moles* aortam illiusque ramos vltra conſuetum terminus *diſtenderet*; quae *nimia diſtenſio* aut, quod ante (§. 23.) monuimus, *rupturam* minaretur, aut, ſi robuſta *ſatis* vaſa forent et quaſi rigida, obturatis emiſſariis *motum* cruoris progreſſiuum penitus *interrumperet.* Fac autem *plus* exilire per vaſa capillaria: totalis ſine dubio arteriarum *euacuatio* tandem ſequeretur. Vtrumque autem talem ſtatum a natura abhorrere, vel me tacente, luculenter pateſcit.

§. 25.

§ 25. Atque huius Corollarii (§. 24.) propoſitio, iam a *Dominico Guilielmino* ſtabilita adeo *vniuerſaliter vera* eſt, vt nulla ex parte quicquam mutetur, *quantumcunque* ampla et capacia aut anguſta, longa aut breuia ſint *vaſa media* inter aorta principium, et arteriolarum fines interiecta. Varientur igitur canales arterioſi quomodocunque, diſtendantur, coarctentur, circumducantur, incuruentur, quaquauorſum: quia omnia plena ſunt (§. 10.); ſemper tamen omne liquidum in iſtis canalibus tam varie modificatis tamquam quieſcens conſiderari poteſt et debet ita, vt nihil aliud fingere nos oporteat, quam ſolam *portionem illam* ſanguinis ex corde *proiectam* per intermedios ductus vacuos ad emiſſariorum orificia *translatam*, atque ibi *excuſſam*. Quatenus igitur ſanguis promoueri debuit; plane non neceſſe erat, vt *hoc reſpectu* arteriae *certa* quadam proportione diminuerentur, aut in *determinata* a corde diſtantia *determinate* decreſcerent: ſed non modo quidam rami longius a corde diſtantes poterant ampliores eſſe propioribus; verum ex ramis quoque maioribus per ſenſibilem diſtantiam aequaliter capacibus, ramuſculi minimi poterant deriuari: quemadmodum illud exemplo *ramorum intercoſtalium* ad arterias *renales* relatorum, hoc vero exemplo arteriarum per piam matrem diſperſarum, ſuosque ramuſculos capillares in cerebri corticem demittentium, nec non arteriarum lienis quorundam animalium ex Anatomicis egregie demonſtrari poteſt. Certe, quare in vno loco *capacior* quaedam, in altero *anguſtior* arteria deprehendatur, longe aliae rationes ſubſunt, de quibus vero verba facere adhuc locus non eſt.

§. 26.

§. 26. Sanguinis per arteriarum emiſſaria propulſi (§. 23.) pars *aut* intra vaſa quaedam ſpecifica ſe ſubducit, *aut* intra venas (§. 14.) *quomodocunque* (§. 12.). Cum vero illa ipſa vaſa humores ſuos, qui ex corpore non plane eliminantur, intra venas poſtliminio exonerare ex Anatomia pateat: ratione motus ſanguinis *progreſſiui* ſolius nil impedit, quo minus rem omnem conſideremus, tamquam immediate *ex arteriis in venam* cauam tranſiiſſet. Quapropter cum fieri non poſſit, vt ſanguis extra arterias eliminetur, quin intra nouos alueos cauae recipiatur eo ipſo; *Transfuſionem* ſanguinis (§. 23.) et illius in venas *feceſſum* pro re *vna atque eadem* habere iure poſſumus.

§. 27. Quae de aorta et corde *ſiniſtro* hactenus (§. 15. – 26.) diximus: ea omnia cordi *dextro* et arteriae pulmonali ſimili modo debent applicari. Ventriculus enim dexter aeque contrahitur, ac ſiniſter, ſuasque ſyſtoles et diaſtoles (§. 7.) habet. *Sanguis* igitur e cauitate *dextra* proiectus *valuulas*, arteriae dictae pari ratione ac aortae applantatas *tollit*, ſanguinem in illa *contentum* loco *mouet*, atque arteriam ipſam (§. 15. – 18.) dilatat, vt et iſta extenſionem paſſam *pulſu* manifeſtet. Tum vero, *abſoluta contractione*, et valuulae (§. 20. 21. 22.) reſtituuntur. Et quae *ratio* allegata fuit, quod ſanguis *extra aortae* emiſſaria ſe effundat (§. 23.): *eadem* et hic ſubeſt, quare *ex arteria pulmonali* in aliud vas ille tranſeat. Docet autem experientia, venam *pulmonalem* dictam illum eſſe *alueum*, qui ſanguinem ex pulmonibus recipiat, atque in cauitates cordis ſiniſtras depo-

deponat. *Quantum igitur ſanguinis vno cordis ictu in arteriam pulmonalem propellitur*; *tantum praeciſe* (§. 24.) *intervallo temporis pulſibus illis deſtinato in venam pulmonalem transfunditur.*

§. 28. Vt motus ſanguinis aequabilis (§. 24.) perennet, *vena pulmonalis tantum ſanguinis in cauitatem cordis ſiniſtram deponit*, *quantum ex arteria ſua cognomine* (§. 27.) *recepit*: neque minus; *quantum deponit*, *tantum quoque ex iſta cauitate denuo proiicitur*: ſi enim portio minor aut deponeretur, aut proiiceretur: tunc aut vena et cauitas ſiniſtra tandem rumperentur, aut infuſio decreſceret, vel plane tolleretur; id quod hypotheſi repugnat. Similiter *nec plus nec minus e ventriculo dextro in pulmones propellitur*, ceteris paribus, *quam ex Cauis fuit allatum.*

§. 29. *Quantitas* igitur ſanguinis a ventriculo dextro *ſuſcepta*, in pulmonalem arteriam *iniecta* (§. 28.), per venam (§. 27.) pulmonalem cordi ſiniſtro *infuſa*, inde in aortam *protruſa* (§. 28.), atque in venae cauae alueum (§. 24.) *transfuſa*, *motu ſanguinis naturali* et *aequabili* (§. 24.) *exiſtente*, *eſt vbique eadem*. Patet haec ita fieri debere ex *neceſſitate* naturae (§. 24. 25. 27. 28.); *quaecunque* denique ſit proportio inter diametros venae et arteriae pulmonalis, et aortae; vt vel inde infirmitas ſuppoſitionum *Meryanarum* (Hiſtoire de l' Acad. des Sc. 1699.) luculenter appareat.

§. 30. Portio ſanguinis e corde proiecta, et intra aortam ſe recipiens tantum occupat *ſpatii*, quantum

ratione *voluminis* requirit (§. 17.). Sit autem *e. gr.* aorta pollices tres alta, antequam vllus ex illa ramus exeat; et portio vna vice proiecta occupet ſpatium cylindri arterioſi ad altitudinem vnius pollicis: haec portio a ſuccedentibus duabus promota, intra tres cordis pulſationes perueniet ad terminum illum, vbi prima aortae diuiſio incipit. Si pulſatio quarta nouam portionem proiiciet: haec prima duas nanciſcitur vias, quo ſe recipiat, aut enim in *maximo* aortae canali progreditur; aut in ramum *lateralem* dilabitur; aut *vtrinque* diſtribuitur.

§. 31. Quia ſanguis ab arteriae lateribus vndiquaque comprimitur, et viciſſim verſus omnes plagas nititur (§. 6.9.), atque illuc omnium maxime accedit, quorſum fortiſſime premitur, aut vbi minimam experitur reſiſtentiam: igitur ad hanc canalis diuiſionem *indifferenter* ſe habet, et nihil eſt, quod ipſius curſum huc illucue determinet, niſi *minor reſiſtentia* motui ſuo progreſſiuo oppoſita. Reſiſtentia autem ibi eſt minor, vbi arteria magis euacuata maiorem *extenſionem concedit* et vbi *tranſitus* ſanguinis per arteriae extrema eſt *facilior*. Pro *faciliori* autem *tranſitus* haberi poteſt, ſi minori temporis ſpatio per apertiora emiſſaria aut plura numero plus maſſae ſanguineae eliminatur.

§. 32. Sit iam ramus hic primus (§. 30.) *altero tanto minor*, quam truncus ipſe. Si quidem *tranſfuſio* per emiſſaria ad vnum omnia, ex vtraque parte, *aequali celeritate* perageretur; ſi et *numerus* extremitatum minima-

nimarum in ramo, *altero tanto minor* eſſet, ac in trunco; ſi *iisdem* gauderent *aperturis*: non dubium eſt, quin *tertia pars* portionis ſanguineae in ramum delaberetur, binae autem reliquae tertiae partes in trunco progrederentur. Cum vero hae noſtrae ſuppoſitiones inter ſe ſint in ratione *infinities variabili*: igitur *diuiſio* portionis ſanguineae ſimiliter *variari* infinities poteſt, ita, vt, ſi ſpeciminis cauſſa caſum allegare *ſimpliciſſimum*, et extremitates rami ad vnum omnes *obturatas* fingere liceret, omnis res aeque conſiderari poſſet, ac ſi *nullus* plane *ramus* adeſſet; totaque ſanguinis portio tunc relicto diuiſionis confinio in *ſolo* trunco ſe contentura, ac portioni nouae a tergo inſequenti locum conceſſura eſſet.

§. 33. Patet igitur denuo (§. 31. 32.), ex *quantitate et capacitate ramorum*, et illorum ad truncos *relatione*, ita nude conſiderata nihil concludi poſſe, ſed *diſtributionem* ſanguinis ab illius ipſius *quantitate* ac *celeritate*, qua arteriarum extremitates egreditur, dependere. Quamuis igitur, vt exemplum ſupra (§. 25.) allegatum retineamus, arteriae intercoſtalis ramulus minor ſit, quam renalis: fieri tamen poteſt, vt portionis ſanguineae e corde proiectae pars multo maior intra illum recipiatur, quam intra renalem. *Similiter* res ſe habere poteſt inter arterias renales et reliquum aortae truncum.

§. 34. Portio ſanguinea primam ramificationem (§. 30.) transgreſſa in aortae trunco pergit, donec peruentum ſit ad diuiſionem *nouam*. Tum vero ea omnia, *eadem ratione et ordine* ſe habent, quae de confiniis ra-

mi primi (§.31.32.33.) diximus. Similia accidunt in diuiſionibus reliquis, donec in diuiſione *vltima tota* illa *portio* ſit exhauſta.

§. 35. Sed iam alia ſuboritur quaeſtio, quae paululum enucleanda nobis videtur, antequam ſanguinis promotionem vlterius proſequamur: nimirum (§. 18.), *an transfuſio* illius *extra arteriarum carceres fiat eodem momento, quo fit proiectio* eius *ex corde*, ſeu *in ſyſtole? ſiue an id fiat in diaſtole?* ſiue *tempore vtroque?* Haec enim *tria* bene inter ſe diſtinguenda ſunt ac determinanda, ſi ab erroribus cautos nos praeſtare velimus. Quod ſanguis *tempore ſyſtoles*, impetu a vi cordis concepto in venas transeat, de eo quidem tamquam de re ſanctiſſime certa ne dubitare quidem auſi ſunt Autores; quia vero ob diminutam illius celeritatem non totam portionem vna vice a corde proiectam tranſire poſſe arbitrarentur: etiam diaſtoles tempus addiderunt, atque ad inſtaurandam velocitatem arteriarum actionem in ſubſidium vocarunt. Quo iure id factum ſit, fortaſſis non incongruum erit, paucis examinare. Primo autem ne hoc quidem tamquam verum admitti poteſt, quod, ſi ſanguis eadem celeritate, qua arteriam ingreditur, per totam viam progrederetur, transfuſio cum ſyſtole neceſſario coincidat; niſi vaſa vbique plena et rigida eſſe prius dixeris. Sint enim arteriae *rigidae et plenae*: tunc fluidum in illis contentum conſiderari poſſet, vt vnum continuum impetui non cedens niſi in ſui extremitate patula: dum ergo ſanguis nouus veterem in principio aortae percuteret; vltimae huius liquoris particulae in extremis arteriarum ramuſculis motu communi-

municato tranſirent in alia loca. Nam in hoc caſu ſuppoſito omnia ſe habent, vti in ſiphone. Sipho enim eſt vas arterioſum rigidum et plenum, liquor contentus eſt ſanguis, vis emboli mouens eſt vis cordis: et quemadmodum in momento truſionis emboli liquor ex ſiphone profilit; ita ſimiliter in momento actionis cordis ſanguis extra vaſa viam ſibi quaeſiturus eſſet.

§. 36. Verum enim vero, cum, *quae fingimus* (§. 35.) *non exiſtant*, etiam ex hac parte parum proficiemus. Abſit autem, vt ex *negata vaſorum rigidate*, et, ſi vel maxime concederemus, (quod tamen hactenus ignoramus) celeritatem ſanguinis in vaſculo extremo quouis ſeparatim conſiderato non eandem eſſe, quae erat in arteriae principio, abſit inquam, vt exinde concludere vellemus, ſyſtoles tempore *non omnem* portionem (§. 24.) in venas *transfundi*. Oportet ſane, vt quantitatem illius celeritatis ſciamus, absque cuius menſura ratiocinium noſtrum fluctuat. Poſito enim celeritatis decremento, aut illa omnis euaneſcet, aut aliqua ſaltem reſtabit. *Si* quidem *velocitas nulla* foret, tum et effectus virium cordis eſſet nulla, et maſſa foret reſpectiue infinita, verbo: *nullus* plane *motus* quatenus a potentia cordis dependeret, ſequeretur, ſed in ſyſtole cordis ſanguis in extremitatibus perfecte *quietus* ſubſiſteret; in hoc igitur caſu tempus transfuſionis a ſyſtoles cordis tempore differret. Sed reſtet adhuc aliqua velocitas: fac illam *tantillam* eſſe: vnde nouimus anguſtiam viae, vtpote celeritatis remotam, per multitudinem extremitatum non compenſari? Quamuis enim vaſcula ſint oſculis praedita

minimis, vt vix vnicus ſanguinis globulus minimus pertingat: ſunt illa tamen infinita numero, vt, quae portio ſanguinis non niſi longo temporis interuallo per vnicum oſtium prorumpere poterat, nunc in infinitas diuiſa portiunculas breuiori tempore per portas plurimas egredi poſſit, quam facillime; et totalis transfuſio ſyſtoles tempore adhuc abſoluatur. Tametſi vero partitis temporibus illam fieri cum Phyſiologis ſtatuere velimus: omnium minime tamen motum ſanguinis aequabilem (non qualem nos ſupra (§. 24.) definiuimus ſed ex mente *Guilielmini*, *Bellini* etc., quaſi in quacunque vaſorum parte ſanguis vbique eadem celeritate feratur,) exinde deducere licebit. Talis enim, vt demonſtretur, oportebit, vt, non vage ſed, determinate oſtendatur, eam praecíſe proportionem inter maſſam fluidi, illius velocitatem, vaſorumque capacitatem variabilem in corpore conſtanter conſeruari, quae ad motus aequabilitatem neceſſario requiritur: haec autem definiri non poteſt, niſi menſura virium cordis et arteriarum horumque vaſorum capacitas reſpectiua exactiſſime ſit cognita. Tantum vero abeſt, vt motus ſanguinis in ſectione venae de aequabilitate ſua intra vaſa teſtetur, vt potius eadem methodo illius inaequabilitatem poſſimus demonſtrare: dum enim arteria inciſa fluidum ſuum per ſaltus profundit, ſatis apparet, motum ſanguinis, ſi quidem in venis, at *certe non in arteriis*, (quod tamen Autores dicunt,) et hinc non in vaſis omnibus vniformem exiſtere.

§. 37. Intelligimus, rebus omnibus ita penſitatis, nos ignoratione priſtina (§. 35. 36.) laborare: quam vt excu-

excutiamus, viam a priori diuerſam ingrediamur. Non enim ex eo, quaſi vis cordis mouendae toti maſſae ſanguineae non ſufficeret, aut, quod reſiſtentiae ex attritu illius ad vaſorum latera ortae velocitatem, qua moueri debebat, ad nihilum redigerent, vel ſaltim minuerent, ſed ex rationibus et cauſſis longe aliis hoc negotium deriuandum videtur. Oſtendimus, vbi primum cor portionem ſanguinis expreſſit, illam valuulas ad aorta latera (§. 16. 17.) applicare; ac locum intra illius cancellos quaerere, maſſamque antecedentem ad certam quandam diſtantiam vlterius (§. 30.) pergere. Haec autem omnia accidunt tempore ſyſtoles. Sanguinis igitur, ſi non tota maſſa, portio tamen aliqua ſyſtoles tempore in arteriis mouetur. Porro experientia docet, omnia fluida conſtanter quaqua vorſum premere. Non dubium eſt igitur, quin (§. 6.) ſimilia ſanguini accidant, qui verſus duo potiſſimum diuerſa loca ſuam preſſionem exercet, dum cor egreditur; verſus aortae latera, et verſus portionem ſanguinis antecedentem, quae pari modo ſub iisdem conditionibus progreditur. At vero vaſa extenſilia adeo prope ſanguini accumbunt, vt illius impetum tamquam in inſtanti experiantur; *e contrario* extremitates arteriarum multo longius diſtant, quam vt fluidum in illis haerens, eodem momento ex actione cordis motum imprimi ſibi patiatur. Citius igitur arteriae dilatantur, quam particulae in vaſis capillaribus extimae ad motum ſollicitantur. Arteria autem dilatata maiorem capacitatem nanciſcitur, et proiectae portioni ſpatium concedit, quo ſe proripiat (§. 17. 18.): Vbi primum vero ſanguis locum nactus fuerit, tum ratio

ratio ceſſat, quare et ſimul extra arterias effundatur. Tempore igitur ſyſtoles cordis nihil ſanguinis ex arteriarum extremitatibus in alterius generis alueos (§. 26.) deponitur: ſed intra ampliatas arterias tamdiu deliteſcit, donec hae ipſae elatere ſuo (§. 21. 23.) ſe reſtituunt, ac diminuta capacitate, quod ſuperfluum eſt, exturbant. Quapropter *differt tempus transfuſionis a tempore ſyſtoles*: Quies autem *cordis* ſeu *diaſtole*, *et arteriarum contractio*, *et ſanguinis* extra illas *transfuſio eodem temporis momento accidunt*.

§. 38. Apparet ex dictis (§. 37.) tam veritas, quam ratio phaenomeni experientiâ *Harueianâ* (§. 18.) deprehenſi. In qua quidem adſtruenda nonniſi principium plenitudinis atque elaſticitatis vaſorum, et naturam fluidorum (§. 6. 9. 10.) in ſubſidium vocauimus; neque inſufficientiam virium cordis ad mouendam totam ſanguinis maſſam et ſuperandas reſiſtentias incuſauimus, ſed inſufficientiam temporis, quo ſyſtole peragitur, ad producendum motum in capillaribus, cuius quidem generatio in omni corpore ſucceſſiua eſt, minime omnium vero in fluidis, quae alueorum lateribus extenſilibus et cedentibus coercentur, ſimultaneus eſſe poteſt: adde, quod poſita dilatatione arteriarum, neceſſario illarum euacuatio, tamquam ſuperflua res tollatur. Non enim, quia ſanguis ob amiſſam primam velocitatem tempore ſyſtoles arteriis excedere non poteſt, illae dilatantur et pulſant; ſed, quia arteriae dilatantur, ſanguis in illorum extremitatibus tantisper quieſcit.

§. 39. Cor agit et quiescit per viciſſitudines: tempore autem quietis arteriae nihil ſanguinis reci-

recipiunt, ſed in venas transfundunt (§. 24): ſimiliter, tempore actionis extremitates arteriarum quieſcunt, et nihil (§. 38.) per illas in venas transfunditur. Quemadmodum igitur arteriae per vices replentur, et deplentur, ita et venae per vices ſanguinem recipiunt: ſed tamen diuerſimode. Sanguis in arterias proiicitur vi cordis; in venas autem transfunditur vi arteriarum contractilium. Tota portio vna cordis actione proiecta, in vnum canalem arterioſum tranſit; aequalis autem maſſa transfunditur in venas canaliculis partitis, quibus neceſſario ſanguinis maſſa in portiunculas minimas diuiditur. Actio cordis impetuoſa eſt; transfuſio autem lente, blande ac minutatim procedit.

§. 40. Dum ſanguis in venis contentus per accedentes nouos humores augetur, eadem accidunt, quae de arteriis (§. 23. 24.) diximus. Idem igitur valet ratiocinium in caſu ſimili. Aut enim, quia venae plenae ſunt, auctus humor extra venas locum ſibi quaerit, aut venae debent dilatari, vt maior illarum capacitas oriatur, facta quauis transfuſione noua. In arteriis vtraque methodus (§. 17.) locum habuit; quaenam autem quando et quomodo in venis accidant? ea vero iam videbimus.

§. 41. Primo quidem, me non monente, patet: non de eo quaeri, an venae etiam ſint dilatabiles? id enim materiae illarum neceſſario (§. 9.) conuenit; neque, an venae dilatentur nonnumquam? ſiquidem experientia ſatis docemur, venas alio tempore magis, alio minus

turgidas apparere: cuius rei cauſſa eſt, ſi vel tota humorum maſſa augetur, ac propterea maius ſpatium requirit; vel ſi accedente calore illa ita dilatatur, vt in volumen maius ſe diffundat: ſed id quidem nos ſcire oportere: *an venae facta quauis transfuſione noua, dilatentur*, morulis interiectis a ſyſtole cordis determinatis? Hoc vero fieri in ſtatu naturali negauerim. Si enim venae dilatarentur reciproce, tumore aut pulſu id pateſceret reciproco. At vero nullus ſentitur tumor aut pulſus reciprocus. Dixeris fortaſſe: ſanguinem non cum impetu tanto (§. 39.) in venas irruere, quanto in arterias proiicitur; non igitur adeſſe debere pulſum: porro, portiones a ramulis capillaribus minimas recipi, inde nec tumorem oriri poſſe. At vero, cum repletio venarum, etſi lente et minutatim, per vices tamen, procedat, et ſanguis ex innumeris ramulis in maiores ramos ſed pauciores congeratur: oporteret certe, vt vel aliqualis tumefactio reciproca ſentiretur: at, tam pulſus, quam tumoris veſtigia plane nulla: ergo etiam nulla dilatatio reciproca; ergo nulla reciproce ampliata venarum capacitas; nullum humori nouo intra venas diuerticulum. Oportet igitur, vt, *quo momento venae replentur per vnum extremum, eodem momento illae depleantur per alterum extremum, ſiue, vt transfuſio ſanguinis in venarum alueos momento coincidat cum effluxu illius nouo in cordis ventriculos*; et quantitas ſanguinis in venis ſemper eadem maneat.

§. 42. Quo igitur tempore cor ſiniſtrum quieſcit, ſanguis vi arteriarum in cauam, (§. 37.) et eodem mo-

momento (§. 41.) in ventriculum dexterum detruditur: ſimiliter, quo tempore cor dexterum quieſcit, ſanguis ex arteria pulmonali in venam cognominem (§. 37.27.) et eodem momento (§. 41.) in ventriculum ſiniſtrum deponitur. Quo autem tempore ventriculi quiescunt, ſanguinem recipere et in diaſtole eſſe (§. 7.) dicuntur: Ergo *diaſtole vtriusque ventriculi fit eodem momento.* Ita apparet huius ſequelae neceſſitas per ratiocinium; veritas autem facti cum experientia conſpirante probatur. Diſcimus enim cum *Harueo*: vtrumque ventriculum cordis proiicere ſanguinem in arterias eodem temporis momento; quieſcere eosdem et ſanguinem nouum accipere itidem ſimul. Cum igitur diaſtole cordis et venarum repletio (§.praef.et 41.) coincidant, non mirum eſt, venas non pulſare (§.41.),quia eodem momento,quo ſanguinem recipiunt, eodem etiam in ventriculos cordis deponunt. Non igitur neceſſe erat, venarum alueos fieri capaciores dilatatione; cum quantitas ſanguinis in illis non augeatur et diminuatur reciproce, ſed fingi poſſit, quaſi portio quaedam cruoris ex arteriarum extremitatibus congeſta momento vno in ventriculos transſiliiſſet, reliqua maſſa ſanguinis intra venas manente eadem et immota.

§. 43. Non dubito, fore quosdam, qui me erroris cuiusdam arguent, cum dicent, me precario aſſumere, quod ſanguis ex venis immediate in ventriculos cordis illabatur; eſſe enim auriculas ita dictas, per quas ſanguis prius transfluere debeat, ſiue: depletionem venarum fieri in auriculas, non autem in ventriculos,

et hinc neceſſario non cum diaſtole cordis, ſed cum ſyſtole conuenire. His vero tum demum reſpondebo, cum demonſtrauerint: nec plus nec minus ſanguinis, quam in auriculis continetur, vna vice in ventriculos promoueri; non poſſe ſanguinem ex cauis et pulmonali vena in ventriculos dilabi, niſi ille prius in auriculis diuerticulum quaeſiuerit; auriculas igitur cum depleantur, eodem tempore viam intercludere venoſo ſanguini in ventriculos. Sunt ſane auriculae capacitate ſua valde inaequales: non igitur illae menſura ſanguinis eſſe poſſunt, qui ſingulis vicibus a ventriculis recipi debet; neque ita a venis disiunctae ſunt auriculae, vt ſeparatum corpus quodpiam conſtituant; quin, potius pro vno continuo canali haberi debent, qui communi quodam hiatu in ventriculos ſe exonerat. Quando igitur auriculae deplentur, idem eſt, ac ſi venae illis continuae depletae fuiſſent. Manent igitur hactenus inconcuſſa, quae §. 42. diximus.

§. 44. Antequam haec finiam, duo mihi videntur monenda. Primo quidem, quae aliquoties de Synchronismo diaſtoles cordis et transfuſionis ſanguinis dixi, non ita intellecta velim, ac ſi negarem tempore ſyſtoles quicquam in venas recipi, aut recipi ſaltim poſſe. Cum enim haec ſanguinis transfuſio a certa quadam vi arteriarum (§. 23.) cuius quantitatem et modum agendi hactenus ignoro, dependeat: facile apparet, celeritatem transfuſionis determinari non poſſe; non igitur aſſignare tempus licet, quod requiritur, donec tota portio ſanguinis vna vice in aortam proiecti iterum extra

extra arterias ſe ſubduxerit. Hoc tantum argumentationibus meis innuo. ſi vniuerſa maſſa ſanguinea tamquam quieſcens ſupponatur, et iam cor portionem determinatam in aortam proiiciat; hoc ipſum proiectionis tempus non eſſe momentum illud, quo ſanguis in venas transfundi incipiat, ſed hanc transfuſionem fieri aut ſaltim inchoare tempore diaſtoles; quo quidem ratiocinio intactam relinquo hanc quaeſtionem: quanta illa morula ſit, quae duas transfuſiones intercedat? an aequalis ſit tempori diaſtoles cordis, an maior, an minor, an infinite parua? Deinde, quod ſecundo loco monendum duxi, ſi qui ſunt, qui quaerent, quomodo ea, quae de auriculis dixi (§. 42.), ad vtramque applicari debeant; cum dextra multo maior ſit ſiniſtra, et ventriculum dextrum capacitate ſua aequet: iis reſponſum eſto: nec me cauſſam inaequalitatis auricularum nunc allegare poſſe, nec id inſtitutum meum requirere; quare enim dextera amplior ſit quam ſiniſtra, id ego quidem hactenus fingo ignorare. Vidimus ex antecedentibus, et multoties inculcauimus, capacitatem vaſorum maiorem aut minorem nullius plane momenti eſſe in hoc negotio, modo vis ſanguinem pellens ſemper par ſit omnibus obſtaculis ſeparandis, id quod in corpore viuenti neceſſario ſupponitur. Cauſſa variatae capacitatis alibi quaerenda eſt. Dices, me multa neſcire. Ita quidem eſt. Sed hactenus facta quaeſiuimus, et ea quidem aut phaenomena, aut ex iidem immediate eruenda, queis ea, quae neſcimus, tandem addiſcantur. Praeſtat ſcire pauca, quam obtrudere et ſibi et diſcentibus, ratiocinia praecipitata, vaga, et apparenter tantum vera.

AORTAE ET SPINAE DORSALIS MIRA CORRVPTIO:

praemittuntur

Animaduersiones generales ſuper Spinae dorſalis ſtructuram:

AVTORE

I. G. D.

§. 1.

Tabula XV. QVatuor vitae inſeparabilia Flumina, Chyli, Lymphae, Sanguinis et Succi neruei, et quod hinc conſequitur, varia eo pertinentia organa, in vnam ſpinam dorſalem ſunt coniecta, vt Anatome vel prima oculi inſpectione docet. Numquid itaque e ſola iſtiusmodi fabricae contemplatione, Summi Conditoris ſapientiam prouidentiamque intelligere ac praedicare procliue eſt? Id profecto in dubium vocare, aut velle quemuis locum et quamuis poſitionem quibuslibet partibus fore accommodatam, ac ſine conſilio, ſine peritia, et ſine intelligentia, earumdem ſedes efformatas eſſe, ſumma inſania eſt, ſiquidem euidens eſt, quod mors vel vita, eiusdemque felicitas vel infelicitas, e certa ſitus determinatione ortum trahere poſſit. Si in quodam homine, Medulla ſpinalis quauis alia regione Thoracis et Abdominis, et quauis diſtantia, extra thecam oſſeam, inter praefatarum cauitatum viſcera, collocata, ſicque variis percuſſionibus, diſtorſionibus aliisque iniuriis ſuiſſet obno-

obnoxia; cenſeo haud periculoſiorem ſtatum et conditionem concipi poſſe, hinc absque alia cauſſa, talis hominis perniciem ineuitabilem eſſe. Si porro quemuis alium ſitum Ductus Chyliferi comminiſcimur, non ſub vaſis intercoſtalibus, ſed ſub poſtica facie Aortae, aut extra pleuram, ad Tracheae aut Oeſophagi confinia, vt vel potus vel aëris gelidi impreſſionibus, vel vomitus vel tuſſis exagitationibus ſit expoſitus, numquid talis hominis vitam aut nutritionem maximo in periculo verſari, exiſtimandum eſt, vt conſideranti patet.

§. 2. Hic autem in tranſitu, animaduerſione dignum eſt, quod ab inuenti *Aſelliani* et *Pecquetiani* temporibus ad huncusque diem, in morborum et cadauerum tanta varietate et frequentia, de viarum chyliferarum conditione ſeu ſtatu praeternaturali, nihil adhuc ſit annotatum, quas vias tamen, vt ſunt corruptioni propenſae, ac vt eſt hodie vitae hominum maxima depraua*t*io, citius quam alias integritatem eſſe amiſſuras, rationi haud eſt inconſonum: proptereaque tanto magis ea de re ſumma cum diligentia inquirendi cauſſa eſt, quanto verí eſt ſimilius, earumdem viarum laeſam aut depraua*t*am fabricam, funeſtorum effectuum cauſſam ſaepius exiſtere; et quanto turpius eſt, opinionibus et adminiculis temere excogitatis decipi, vt vel ſolo exemplo Aortae, quae interdum contra Medici opinionem, ſub varia forma, grauiſſimorum affectuum cauſſa eſt effectrix, ſatis ſuperque intelligitur.

Caeterum, iſtiusmodi praegrandis et tanta vi pulſantis vaſis, talem non vero aliam ſedem, Naturam eſſe

esse molitam, efficiendo videlicet, vt vacillationis et fluctuationis expers, hinc osseo fundamento postico stipatum, antica vero facie, a supertensa tela duriore ad spinae contactum propius compulsum, denique a viscerum consortio sit seclusum, id profecto inter fabricae humanae perfectiones et praerogatiuas haud postrema, hinc ad seruandum motum directum, et circuitum sanguinis, aequabilem, a figura, diametro, elasticitate, et rectitudine constante Aortae pendentem, est perquam necessaria.

§. 3. Quia autem, verae fabricae spinae dorsalis memoria apud me fere obsoleta erat, quanam ratione per hosce dies eam sim consecutus, ac porro quid in eodem subiecto adhuc animaduersione dignum rarumque sit obseruatum, duce Anatome hic exponam. Ossa itaque spinae dorsalis, contra aliorum ossium communem indolem, crusta exteriore, quae in aliis ossibus vitro similis, incredibilis firmitatis soliditatisque caussa est, haud naturaliter obducta visa sunt: Eorum solummodo pars postica dorsum vocata, super quam processus eleuantur, tam extus quam intus istiusmodi crusta, sed tenui est instructa: Ex aduerso, parte anteriore quae processuum ac istiusmodi crustae expers est, color apparet atrorubicundus, eiusdemque coloris succus exsudat, quo deterso ipsarum cellularum foramina magno numero iam in oculos cadunt, vt in vertebrarum corpore aeque ac extremis processuum, perspicere procliue est.

§. 4. Porro, incredibilis copia minimorum vasculorum rubentium, super praefatam rubicundam superficiem luxuriantium profundasque radices intra cellulas agentium

hic

hic eſt poſita, vnde forte ſupra memoratus color ortum trahit: Quem contextum, vt ſenſibus apparet, membranae circumoſſalis vſum praeſtare veriſimile eſt. 2. Congeries aeque ampla ſequitur exilium et complanatorum ligamentorum, colore ad ſericum album accedentium, a quibus cum vaſa tum os ipſum comprimi vel ex eo eſt manifeſtum, quod ab vna ora vertebrae vsque ad alteram incedendo, et ſeſe inuicem interſecando variasque decuſſes efficiendo, eo gradu oſſi ſunt connata et tenſa, vt mucro ſcalpelli citius frangatur quam eorum cum oſſe nexus ſoluatur, cuius facta acie cultri inciſione, cauſſam protinus cognoui, videlicet quod praefatorum ligamentorum nonnullae productiones, ipſos receſſus oſſis ſubeant, ac naturam oſſeam aſſumant. 3. Antequam ſuper ſpinae oſſa, Pleura cum pauco adipe eam comitante ſit extenſa, aliud proprium integumentum obſeruaui, videlicet pellem craſſiſſimam, elaſticam, firmo nexu iis agglutinatam, cuius craſſities in medio ſesqui lineam facile aequat, ad latera vero ſpinae parum eſt imminuta. Caeterum, vt ligamenti, ſic pariter eius ſubſtantia eſt tenax, elaſtica, hinc mirifice accommodata, partim ad ſpinae compagem continendam et firmandam, partim ad fulcienda corpora quae ſpinae dorſali ſunt impoſita et alligata, vt ſunt ſpinalis medulla, aorta etc.

§. 5. Omiſſa hic deſcriptione illius vinculi cartilaginei, quod mucoſum, amplum, interiectum ſpinae ſingulis iuncturis, ac vt obſeruaui, ita eſt compreſſum, vt in ambitu parum extrorſum protuberet, de quo vid. *Cel. Morgagni* Aduerſ. 3. p. 104. Vndecim ſunt diſtin-

cta ligamenta, in praefato ſubiecto, ad ſpinae oſſium particularem connexionem: Nempe, ſub pelle §. 4. deſcripta, ad vertebrae anticam lateralem inferioremque faciem, vtrinque ligamentum enaſcitur, a quo in proximae vertebrae marginem obliquo inceſſu terminatur, hinc per praefatum geminum ligamentum corpora vertebrarum inter ſeſe firmo nexu ſunt connexa.

Diſiunctis a ſe inuicem praefatis corporibus vertebrarum, et oculis in baſin inferiorem acuti proceſſus conuerſis, duo iterum ligamenta patent, quae in eo a caeteris ligamentis differre viſa ſunt, quod non ſolum colore luteo infecta, verum etiam maiore ſoliditate praedita, hinc minus elaſtica ſenſibus appareant; Praeterea eorum extrema duritie oſſium erant aemula: Inde breui eoque obliquo inceſſu, ad radicem et baſin ſuperiorem acuti proceſſus inſequentis, altero extremo ſunt alligata: Quam tametſi validiſſimam coniunctionem proceſſuum acutorum, duo alia ligamenta minus craſſa, ſed magis elaſtica perficiunt, quae ratione ſitus *transuerſalia* merito appellari poſſunt: Extremo enim altero in latus proceſſus acuti vtrinque implantata, altero transuerſim inſequentis vertebrae dorſo ſunt connexa: Quare eum in finem ea hic eſſe poſita, ne proceſſuum acutorum articulatio, facile luxationi eſſet obnoxia, haud immerito ſuſpicor. De qua profecto proceſſuum acutorum articulatione obſeruare hic oportet, ſingulos proceſſus parte ſui ſuperiore complanatos et conuexos, inferiore autem ſinuatos eſſe, quo efficitur, vt pars gibba et ſinuata eiusdem proceſſus, ſinui et gibbae

hac parti praecedentis et inſequentis proceſſus ſeſe mutuo accommodet, id quod Graecis γίγγλυμος vocatur. In praefata articulatione duo adhuc ſunt animaduertenda, 1. pinguis materia, quae ceteris iuncturis oſſium eſt communis. 2. Tendinum muſculorum dorſalium nexus cum proceſſibus acutis, quem haud extrorſum ſeu in gibba parte, verum introrſum a dextris et ſiniſtris fieri obſeruaui.

Porro ſequuntur, propria ligamenta proceſſuum obliquorum tam ſuperiorum quam inferiorum, quae e toto ambitu radicis proceſſuum enata, hinc ſuper totam iuncturam expanſa validam et elaſticam thecam ſuper eam efformant, ſub qua praefatorum oſſium actio ſine impedimento perficitur. Poſt euacuationem medullae ſpinalis, aliud ligamentum, ſolitarium, teres, et elaſticum, cuius diameter fere 2. lineas aequat, thecae oſſeae incluſum eique forma columnae firmo nexu eſt agglutinatum: Ibi parum protuberans, et ductu perpendiculari partem anteriorem thecae recta percurrens, non ſolum vertebrarum corpora compingendi, verum etiam, vt coniicio, ſpinalem medullam a compreſſione et alliſione oſſis vindicandi, vim et facultatem forte habet.

§. 6. Hic, antequam ad alia procedam, exigui Muſculi minus ſunt praetermittendi, quorum fortaſſis deſcriptio hactenus eſt omiſſa, vel ſuper quos, ſi *Transuerſalium interiorum* titulo innotuerunt, aliquid monere neceſſum eſt: Nempe, obliquo et inferiori proceſſui extrorſum, altero extremo ſunt alligati, alteroque poſt

breuem et obliquum inceſſum, inſequentis vertebrae proceſſui transuerſo eiusque parti inferiori firmo nexu agglutinantur.

§. 7. Nunc, quod iam ſum expoſiturus, nempe de oſſium ſpinae, iisque ſuperincumbentis aortae mira corruptione, id contemplationis eiusdem ſubiecti alter fructus eſt: vnde ſupra memorata aſſertio de vitae inſeparabili coniunctione ſpinae et aortae, et de bonis aut malis effectibus e tali conditione vel integra vel deprauata, conſequentibus, ſatis intelligitur. Quam duplicem deprauationem in genere illuſtrare procliue eſt, per annoſae, multis nodis et excreſcentiis deformatae et tumefactae arboris truncum: ac pone iſtum, antiquum murum, variis locis perforatum, hinc trunci corticem per totidem radices intra praedictas rimas ſeu cauitates propagatum iisdemque concretum; Ea profecto ratione, a 3. dorſi vsque ad 6. eiusdem nominis vertebram incluſiue, aortae et ſpinae dorſalis imago oculis eſt oblata: Caeterum, ſupra et infra praefatum ſpatium, ſeu in aorta ſeu in ſpina, nullum vitium, nullaque deformitas ſenſibus apparuit. Initio, Aortae exteriorem habitum ſum contemplatus, in qua duo erant animaduerſione digna, videlicet 1. ſuperficiei fabrica, 2. eiusdem dilatatio. A iuſta ſeu naturali diametro, quae eſt 14. lin. eo exceſſu expanſionis erat tumefacta, vt eius ambitus aeque ac longitudo ſex pollices cum dimidio aequaret, vnde eius diameter fere triplo maior naturali erat, et quod hinc conſequitur, ſpatium quod nunc occupabat, illud quod naturaliter occupat, triplo exce-

excedebat: Ignoro autem, an alicubi in cauo thoracis, a praefata mole aortae, et hinc orta anguſtia et compreſſione, cuiuscunque vitii quaedam manifeſta et ſenſibus conſpicua indicia in viſceribus apparuerint nec ne? de eo enim, quoniam me abſente facta eſt inueſtigatio, aliquid certi affirmare haud licet. Caeterum, ſub iſtiusmodi habitu, figura aortae ſic erat immutata, vt iam *magnae Auis ingluuiem* perfecte exprimeret. vid. Fig. I. in qua B Aneurisma, ſeu ingluuiem, A et C orificium ſuperius vel partem arcus extremam, ſeu gulam, et inferius, ſeu oeſophagum denotat.

§. 8. Quod iam alterum phaenomenum ſpectat, nempe exteriorem ſuperficiem, quae haud minus quam figura mirifice erat deformata, animaduertere oportet haud ſolum aequalitatem et laeuitatem, verum quoque vel ipſam elaſticitatem penitus abolitam fuiſſe: Tametſi enim manu compreſſa et diſtracta, haud minus priſtinam violentam diametrum conſtanter ſeruabat, et paulo fortius comprimendo, haud minus quam in fractione corticis rigidi, crepitatio et fiſſio diuerſis locis efficiebatur, vt infra videbimus. Porro, vt iam ſupra allata ſimilitudine arboris nodoſae eſt indicatum, vel vt lamina metallica profundius malleata, ſed auerſa parte haud complanata, in qua ſingula veſtigia mallei eminent ac protuberant; ſic quoque variae figurae et magnitudinis tuberibus, ac in horum interſtitio impreſſionibus, et maculis vniuerſa ſuperficies erat exaſperata: Quas propterea maculas coniicio tuberculorum incipientium eſſe rudimenta: nempe ſi vis contundens haud intermiſiſſet, ne-

ceſſe fuiſſet, poſt certum temporis ſpatium iſtiusmodi tubercula ſeu parua Aneurismata excreſcere. Eam ob cauſſam, rationi haud inconſonum eſt, cuncta hic exſtantia tubercula, aeque vera eſſe Aneurismata, ac ingens eorumdemque Parens Aneurisma, cum quo communem originem habent: Vnde vel e ſola foecunditatis conſideratione, *Aneuriſma monſtroſum* merito appellatur. In aortae antica facie, de qua hic tantummodo ſermo eſt, nonnulla ampliſſima erant vt ouum columbinum, alia vt eiusdem oui dimidium, alia vt piſum: Caetera autem, ſub parte poſtica aortae ſita, infra videbimus. Porro, eorumdem figura haemiſphaericae reſpondebat, idque haud praetermittendum eſt, quod tactu iudice eo craſſior et ſpiſſior ſubſtantia tuberculorum ſit viſa, quo extenſio ſeu dilatatio maxima: ex aduerſo, in minoribus tuberculis, vbi gradus dilatationis fuit minor, ibi maior attenuatio erat: His praeterea, haud vero illis compreſſis, crepitationem vel ſonitum, vt in perfractione teſtae oui audire procliue erat. Poſtremo annotandum eſt, iſtiusmodi tubercula ſuper truncum Aneuriſmatis ſic diſpoſita eſſe, vt in parte altiore ſeu eminentiore, vbi nempe maxima fuit dilatatio, ibi craſſiora et maxima, in parte autem decliuiore minora et parnula tubercula ſint poſita.

§. 9. Hactenus, exteriore habitu aortae eiusdemque conditionibus vt antica facie ac in ſitu adhuc verſante in conſpectum veniunt, diligenter perluſtratis, animus porro ferebat, faciem ſpinae auerſam et contiguam, cultro alias facile ſeparabilem, ante interioris fabricae contemplatio-

plationem aggredi, ſi id quidem aliae cauſſae minus vetent, vt protinus ſum edoctus nempe, per iſtiusmodi concretionem, videlicet trunco eiusque cortice per profundas radices muro contiguo ſic conglutinato, vt citra alterutrius laceracionem auelli, et eradicari nequeat, de quo in praeced. §. Idcirco, ob praefatam ineuitabilem dilacerationem id vsque ad finem differre, ac potius aortam ſecundum eius anticam faciem aperire, hinc primum interiorem fabricam perluſtrare ſum coactus.

Initio, cauum eſt oblatum ingens, et magnae Auis ingluuiei aequale, vt e ſupra memorata diametro iam ſatis eſt perſpicuum. Caeterum, tam ſanguine quam alia quacunque conſimili materia erat vacuum. Hic profecto, in praefatae cauitatis perluſtratione, mirifica phaenomena, hinc corruptionis haud vulgaris indicia, vel prima oculi inſpectione occurrere fatendum eſt, ſuntque ea duplicis generis, alia eius ſtructuram ſeu conformationem, alia texturam ſpectant. Hinc 1. animaduertendum eſt, quod tuberibus, maculis, et impreſſionibus in facie conuexa conſpicuis, totidem foſſae, ſinus, et alueoli in facie concaua reſpondeant, quemadmodum in lamina malleata, pari eminentiarum numero in vno plano, par numerus foueārum in oppoſito plano reſpondet. Mirum autem dictu! iſtiusmodi foſſae haud ſolummodo in aortae antica facie, vbi extenſio eſt minus difficilis, erant excauatae, verum, quod fere eſt incredibile, in parte poſtica quoque, tametſi ad ſpinam, ceu ad murum, arcto nexu ſit alligata, cuius phaenomeni cauſſam infra explicabo. Iſtiusmodi *parua aneurismata*, ſub quadruplici differentia obſeruare

mihi

mihi viſus ſum. Nonnulla formae oblongae, cum vtroque margine conniuente ad profunditatem 2 lin. excauata: Alia figurae circularis, et variae profunditatis, quorum non nulla digiti extremum facile admittere videbantur: Alia obliquo, ſinuoſo, et anguſto orificio, quod ſubito in amplam foſſam rotundam, ouo columbino haud multo minorem erat expanſum, cuiusmodi vna inſignis ad ſuperiorem lateralem et ſiniſtram partem aortae erat poſita: Poſtremo intermixtae erant plurimae impreſſiones fere planae, variae figurae, a re comprimente vel contundente effictae, quas aeque ac exteriores, de quibus ſupra, nihil aliud eſſe coniicio, quam incipientium aneurismatum rudimenta. Caeterum, iſtiusmodi foſſae, ſinus et alueoli, vt cauum principale, ſanguinis aut cuiusuis conſimilis materiae erant expertes. 2. Ad texturae laeſiones hic obſeruatas, iam referri debet incredibilis diſtractio ſeu diſtentio fibrarum, hinc per attenuationem ſubſtantiae, iisdem aeque ac minimis vaſculis conflatae, pelluciditas et quod conſequitur ingens ad rupturam propenſio. 3. In diuerſis locis ſubſtantiae incraſſatio monticulos efficiens, quorum alii anguſtiores et figurae oblongae, alii digiti latitudinem aequantes, membrana communi cauum inueſtiente obducti: qua detracta, fibrarum inuicem compactarum, et vi diſtendente forſan abruptarum hincque contractarum agmen eſſe perſpexi. 4. Profundiorum et magnarum foſſarum incraſſatio, minorum e contra attenuatio, pari ratione huc referendae: Quam incraſſationem, tametſi ſicca et fibroſa ſubſtantia vtrique ſit communis, potius e variis lamellis conflatam eſſe fatendum eſt, quarum aliae tenuiores, aliae craſſiores, coloris flauo albican-

bicantis, praeter vnam in medio positam quae atrorubicundo colore erat infecta, quibus postremo communi membrana obductis, istiusmodi lamellas haud aeque a lympha aut sanguine corrupto, quam potius ab incrassatione et exfoliatione propriae substantiae aortae, ortum manifesto trahere vel e solo oculorum iudicio perspicuum est. 4. Sub eadem membrana communi, materia tophacea, eiusdemque in varias species ac in omnes plagas trunci aneurismatici distributio: Hinc, sub calculorum forma, supra memoratae membranae superficiei internae adhaerescens, eandemque distendens, durissima tubercula variae magnitudinis et figurae, eorumque incredibilem copiam, et quod consequitur, cauitatis summam exasperationem efficiebat, e quibus nonnulla lineam et vltra, alia minus prominebant: Caeterum, figura regulari haud donata, et a lenticulae, vsque ad vnguis minoris amplitudinem, fere aucta: Istiusmodi autem materia, tametsi tacta iudice, calculo sit similis, haud tamen aeque friabilis, sed flexilior, et quibusdam in locis fibrosa: porro in aquam coniecta subito descendit, ac igni imposita odorem ossibus proprium exhalat, hinc, vt intelligere procliue est, substantiae osseae est propensior. Iuxta praefata tubercula, materia tophacea iam latius sese diffundens, et planam figuram assumens, laminam durissimam simplicem efficit, quae tamen haud continua, sed in areas variae magnitudinis, per interiecta spatia membranea, a se inuicem erat disiuncta: vnde, vel istiusmodi particularum inter sese allisione, vel earumdem perfractione, crepitationem seu sonitum, vt a testa oui confracta, per manus compressionem, auditu percipere procliue erat: de qua

tamen re, videlicet rimarum et fissurarum causſa, num ante manus compreſſionem, et ante aortae aperturam, hinc in viuo homine, iam ſint excitatae nec ne? id profecto definire minus procliue eſt.

Porro, conditionum praefatae laminae in iſtiusmodi areis, varias differentias perſpiciebam, videlicet, a centro laminae, cuius dupla erat craſſities et ſoliditas, verſus circumferentiam attenuatam et pellucidam: in quibusdam areis planam et laeuem: in aliis granulis ac tuberculis flauescentibus obſitam eſſe: Quibus addenda eſt tandem poſtrema, haudque inutilis forſan animaduerſio, nempe, iſtiusmodi laminae quantitatem ſeu augmentum, maius eſſe viſum poſterius, in facie ſpinae contigua, quam in reliquo tractu aneuriſmatis, cuius phaenomeni cauſſam in ſequentibus explicare conabor.

§. 10. Cur praeſatam faciem poſticam aneuriſmatis vsque ad finem differre ſim coactus, cauſſam initio 9. paragr. indicaui, quam nunc propterea fuſius ſum expoſiturus, antequam priorem partem diſſertationis, quae de aortae corruptione agitur, concludam. Nempe vt ſupra annotaui, et exemplo illuſtraui, tametſi in aliis ſubiectis ſit res omnis difficultatis expers, aortam e ſede ſua deturbare, aut loco mouere, aut ſi vis, penitus auferre, plane hic erat impoſſibile: Hinc neceſſario erat amplectenda altera via, ſeu interior et concaua facies eiusdem poſticae partis: vnde exterioris, ac ſpinae contiguae faciei conditionem, et quod conſequitur, eiusdem cum ſpina adhaerentiae cauſſam, vtcunque aſſequi poſſe iudicabam: Vbi ſane praeconcepta animi opinione, illam nempe faciem

ciem iniuriis minus expositam fuisse, eiusque concretionem a simplici et communi caussa, vt est inflammatio, aliquando ortum traxisse, sum falso suspicatus. Primo itaque animaduertere oportet, in toto tractu aneurismatis tantam crepitationem, manus compressione, haud suscitatam esse, et quod consequitur, istiusmodi materiam haud aeque abundasse, quam in postica, et spinae attigua facie subque eiusdem communi membrana, quae propterea loricae haud multum absimilis erat: ex quo, aeque ac e subiectae substantiae aortae summa attenuatione, eiusdem elasticitatem fuisse abolitam intelligitur. 2. Huicce conditioni, sequens erat coniuncta, eaque, si ad aortae et spinae conditiones, vt in homine adulto, hinc ad huius soliditatem et resistentiam, animum attendere velis, dictu mira, videlicet, trium insignium fossarum excauatio, et earumdem in spinae substantiam incuneatio vel inclauatio, seu a 3 vsque ad 6. dorsi vertebram profunda implantatio, et cum iisdem vertebris ferruminatio: Caeterum, orificii figura circulari, aeque ac diametro pollicem aequante, tres praememoratae fossae inter sese respondentes, vacuae tamen, oculis apparebant. Posthaec iam, de integritate, hinc dilaceratione aortae minus sollicitus, tandem trunci aortae eradicationem seu auulsionem, conatu tamen et labore maximo, sum aggressus: Quare per istiusmodi violentiam, tota postica facies tresque fossae vertebris inclauatae a reliquo corpore aortae sunt separatae et abruptae, vt Fig. 2. Num. 1. 2. 3. denotat; unde hiatus ingens seu foramen lacerum lit. F. fig. 1. originem trahit. Tabula XV. Fig. 2. Fig. 1.

§. 11. Quo autem ſenſu, vt ſingulare ac minus commune phaenomenum, iſtiusmodi aortae inclauatio et ferruminatio hic ſit accipienda, nunc diſſertationis parte ſecunda, per ſpinae dorſalis contemplationem, explanare conabor. Ablata itaque aorta, tria iſtiusmodi poſtica aneuriſmata 1. 2. 3. a corpore ſeu trunco diuſa, haud minus quam radices dentium, maxillarum alueolis infixae, nonnullis vertebris ſpinae tenaciſſime erant impacta, hinc immobilia, et cuicunque niſui reſiſtentia. vid. Fig. 2. Num. 1. 2. 3. Vel enim prima oculorum inſpectione, ea baſi vertebrarum haud parallela ſolummodo, iisdemque ſimpliciter agglutinata eſſe, verum in oſſium propriam ſubſtantiam deſcendere, et ſinus ſeu foſſas ibidem excauatas occupare, protinus perſpiciebam. Porro, ſpatio a 3 vsque ad 6 vertebram dorſi incluſa, ſic erant poſita, vt primum ſeu ſuperius, et tertium ſeu inferius, baſin ſeu medium ſpinae; ſecundum vero, ſiniſtrorſum decliuem et lateralem partem vertebrarum occupet, unde figura trianguli efficitur: Vbi illud praeterea obſeruare mihi viſus ſum, quod prioris ſeu ſuperioris orificium et cauitas, diſpoſitionem duobus ſequentibus, hinc trunco canalis et ſanguinis motui contrariam obtinens, haud directione horizontali vt duo ſequentia, neque deorſum, verum verſus ſuperiora progrediatur. Poſt eorundem iam, cultri apice factam effoſſionem et abraſionem, qua integra et nuda conſtitutio, et conditiones vertebrarum oculis paterent, tres protinus excauationes ſeu foueae per amplae erant conſpicuae, haud aliter ac ſi per terebram eſſent efformatae: inter quas tamen, mediam quae videlicet in vertebrae

Fig. 2.

tebrae laterali et ſiniſtra parte eſt poſita, duabus aliis contractiorem, ac propterea ſacculo aneuriſmatico minus proportionatam eſſe fatendum eſt; aliarum autem, quae in medio vertebrae ſunt poſitae, vbi oſſeae ſubſtantiae portiones inſigniores ſunt ademptae, cauitas 5 lineas, eiusdemque diameter pollicem aequare viſa eſt: vnde ſacculorum incuneatio hic totalis, in altera partialis erat. Porro animaduertendum eſt, iſtiusmodi foſſas, haud vnius vertebrae eroſionis ſeu perforationis, verum duarum vertebrarum excauatarum effectum eſſe: Nam ſuper commiſſuram in vtriusque vertebrae limbo, exciſio ſeu excauatio ſemilunaris erat conſpicua: Hanc ob rem, prior ſeu ſuprema foſſa, in 3 et 4. media in 4 et 5. vltima ſeu infima in 5 et 6. vertebra, ſedem obtinebat: Vnde iſtiusmodi tres foſſae communes efformabantur, ſiquidem, quod animaduerſione valde dignum eſt, craſſum cartilagineumque ligamentum, quod vertebrarum corporibus eſt interiectum, (vid. §. 5.) aeque ac ſubſtantia oſſea erat conſumptum, ac propterea inter memoratas vertebras ſpatium vacuum transuerſi pollicis intercedebat: Quam conſumptionem, eousque iam proceſſiſſe conſpexi, vt vix amplius, vnius vel duarum linearum latitudine, a medullae ſpinalis cavitate diſtaret. Caeterum, vel prima oculi inſpectione, ac inſequentibus diebus, iſtiusmodi foſſas conſpexi aridas et vacuas, hinc omnis humoris et odoris expertes, et quod conſequitur, e ſola oſſea, poroſa, et aſpera ſubſtantia conflatas. Adde poſtremo, iſtiusmodi partes, quas ſuper corpus vertebrarum extenſas eſſe §. 4.) dixi, videlicet telam vaſcu-

loſam, telam ligamentoſam, pellem elaſticam, hic manifeſto deficere.

§. 12. Nunc, ſuper expoſitam hiſtoriam cum Aortae tum Spinae, ac imprimis vtrum Aneurisma, ſpinae excauationis, an haec iſtius ſit cauſſa, vel vtrum potius a prima hominis formatione, vtrumque vitium ſimul ſit productum? tametſi varia excogitauerim, hic tamen, quia nonnullae ſcitu neceſſariae conditiones deficiunt, definire vereor. Caeterum, communis ſententia eſt, duce *Rhuyſchio*, *Littrio*, et *Freindio*, oſſium corruptionem, Aneurisma vt cauſſam conſequi. Vid. *Rhuyſchii Obſ. Anat. Chirurg.* 37. *et* 38. *Acad. Sc. Paris. A.* 1707. *Freind. Hiſtoire de la Medecine*: nempe, iuxta *Rhuyſchii* ſententiam, *ſicuti ſudores per cutis poros erumpentes in aliquibus adeo ſunt acres, vt induſia, imo et ſubuculae putredinem breui ex iis concipiant*; *Ita etiam humores in Aneuriſmate ſtagnantes, et exinde acrimoniam contrahentes, ſimile quid praeſtare, paulatim tranſudando et oſſa lente corrodendo valent. Littrius* autem et *Freindius*, *preſſionem ſuper membranam perioſtii a tumore aneurismatico factam*, ſimul in ſubſidium vocant. Interim, tametſi iſtiusmodi ſententia Doctiſſimis Viris placeat, minus mihi vitio vertendum eſt, ſi ſua ſponte, a cauſſis os depaſcentibus, potius quam a contagio, aut pondere tumoris aneurismatici, iſtiusmodi cariem ſeu putrefactionem, vel corroſionem Regionum Septentrionalium familiarem morbum, ob exceſſum frigoris, et ſpirituum ardentium abuſum) ortum trahere exiſtimauerim. Quomodo autem a ſola carie oſſis, arteria vtcunque ſana et incorrupta, periculo

periculo dilatationis et corruptionis ſit expoſita: haud enim id perpetuo conſequi oportet) dico, quod pleraque vaſa arterioſa corporis humani, ad eorumdem nempe rectitudinem, firmitatem, ac forte repercuſſionem efficiendam, fulcimento oſſeo, ſecundum naturam ſint inſtructa, quemadmodum aorta, carotides, vertebrales, ſubclauiae, mammariae, brachiales, iliacae, et plures aliae arteriae, quae oſſibus ſunt contiguae. Iam vero, ſi iſtiusmodi arteria, in conſinio cuiusdam oſſis putrefacti ſit poſita, tum ad dilatationem ſeu circulum maiorem, eam propenſiorem eſſe veriſimile eſt, quia baſi ſeu fulcimento iam eſt deſtituta: Vnde principium aneurismatis: Denique, ſi malum eo vsque proceſſerit, vt ea contagio putridi oſſis ſit expoſita, non ſolum exterius agglutinationem, verum etiam intus loricationem, ſeu bractearum oſſearum in cauo aneuriſmatis generationem, ab exundante ſucco oſſeo fieri, nihil vetat.

§. 13. Caeterum, hic in ſubiecti noſtri contemplatione, rem ſingularem (quae profecto arduum mihi problema eſt viſa) minus praetermittere oportet, quomodo nempe fieri poſſit, vt tales vere formidabiles exceſſus, et corporis plena, et ad ſenſum integerrima conditio ſimul appareant: Erat enim homo carnoſus, bene coloratus, et 30. annis maior Cuinam cauſſae, quaeſo, certiori et grauiori, tabidae aut hecticae extenuationis ſummum gradum libentius referrem? quam vitio principum machinarum corporis humani, vt eſt aorta. Mihi namque dupliciter aorta, nutritioni C. H. inſeruire viſa eſt, 1. actione manifeſta, qua irruentem maſſam

ſam ſanguineam cauo ſuo excipere, et a centro ſuo recedere coacta, niſu et reactione ſpontanea, ad priorem figuram ſibi naturalem redit, hinc contentum ſanguinem exprimit; ac per omnes partes C. H. motum localem ei conciliat. 2. actione ſpeciali minus manifeſta, forte vt cauſſa occaſionalis cuiusdam motus fermentatiui, in ſanguine praeexiſtentis, vel vt eiusdem motus cauſſa efficiens: vnde particularum ſanguinem conſtituentium eximiae, et ſanitati inſeparabiles dotes et affectiones originem trahunt. Principium autem ſeu agens, ſola eſt aortae fabrica et conformatio naturalis, nempe 1. villorum neruco-tendinoſorum haud ſumma rigiditas aut inflexilitas, vel eorumdem haud ſumma mollities ſeu flexilitas, iuxta communem legem omnium corporum elaſticorum. 2. vaſculorum trunco aortae intertextorum ſumma foecunditas, quam, tametſi eorumdem minima ſtructura ſit adhuc incognita, ad praememoratam ſpecialem functionem aortae, maxime accommodatam eſſe veriſimile eſt: e quibus poſtremo conditiones reliquas aortae conſequi neceſſe eſt, vt ſunt, eius determinata figura, craſſities, laeuitas ſuperficiei, et poſtremo ſitus. Tantum ita ne abeſt, vt aortae in ſubiecto noſtro conditiones, praefatis conditionibus ad nutritionem C. H. neceſſariis reſponderint, quin vt hiſtoria edocet, eas mirifice deprauatas, et quod conſequitur, ad nutritionem minus idoneas fuiſſe palam ſit: Fam ob cauſſam, haud plenitudo, ſed nutritionis ſummus defectus, hinc ingens extenuatio, et macies obſeruari debuiſſet.

Sed poſito, iſtiusmodi aortae conditionem haud tantam fuiſſe, vt nutritio neceſſario perturbari poſſit,

ſit, aliam hic, niſi fallor, contra nutritionem difficultatem perſpicere mihi viſus ſum, nempe ſuſpicor, in eodem ſubiecto, commeatum liberum chyli et lymphae, per canalem thoracicum interceptum, vel maxime difficilem fuiſſe. Nam, cognita canalis thoracici ſede, iuſta eſt coniectura, non ſolum ſub onere aneurismatis eum delituiſſe, verum praeſertim, a facculo ſiniſtrorſum in laterali et decliui parte ſpinae inclauato, ſimul abreptum, et in eiusdem foſſam praecipitatum fuiſſe. Hic certe haeret aequa. Num itaque, in ſubiecto noſtro duplex erat chyli et lymphae via. *Sunt profecto infiniti caſus*, vt I. T. Comment. coniiciebam, *in quibus duplici, tum receptaculo chyli, tum canali thoracico carere periculoſum videtur.* Quare, tametſi eius rei inueſtigatio ſit omiſſa, haud impoſſibile eſt, dextrorſum aeque ac ſiniſtrorſum, vel ſolummodo in dextro latere, canalem extitiſſe, vt bis ante 8. annos obſeruaui. *Vid. cit. T. I. Comment.* Poſtremo hic, *Riolani* et *Swaluii*, qui neceſſitatis tempore, in omnimoda venarum lactearum obſtructione, chylum per venas meſaraicas, vt in quibusdam animalibus, quae viis chyliferis propriis haud ſunt manifeſto inſtructa, deferri tradunt, coniectura forſan minus eſſet reiicienda. Sed de his ſatis.

CLASSIS TERTIA
CONTINENS
HISTORICA
ET
CRITICA.

DE

LITTERATVRA MANGIVRICA.

AVCTORE

T. S. B.

MAiores noſtri totam Septemtrionalem Aſiam et quidquid fere terrarum inter Volgam fluuium, Caſpium mare, Indiam, Sinas, denique Ruſſiam interiectum fuit, *magnam Tartariam* vocarunt, vt altera eſſet *minor*, in Cherrhoneſo Taurica. Nondum ſatis ab hoc errore cauent eruditi: eundem tamen aliquando dediſſent, cum intra hos paucos annos tantum de his regionibus et populis editum fuit, quantum antea multis ſeculis non fuit exploratum. Iam et Mangjuros rectius nouimus, quos olim Miſſionarii in Sinis *Tartaros Orientales* nuncupare ſolebant: et Mungalos, qui ab iisdem dicebantur *Tartari Occidentales*. Mangjuri a Mungalis ſermone vehementer discrepant: vultu cognationem ab ſtirpe vltima produnt. At *Dürben Oelöht*, ſeu *Dürben Oeröht*, qui vulgo a nobis Calmucci appellantur, non modo in vultu, verum etiam in lingua cum Mungalis conueniunt. Linguae ea fere eſt diuerſitas, quae ſermonis in ſuperiori inferiorique Ger- Tabula XVI.

rnania. Sed ſcriptura omnibus his populis eadem eſt, tantummodo quod pro ratione linguae cuiusque, litterae nonnullae vel omiſſae vel adiectae ad numerum fuerunt, aut quod in litterarum ductibus ſuo quisque populus ingenio indulſit. Sic quaedam etiam diuerſitas reperitur inter litteras penicillo ſcriptas et typis excuſas. Illae enim liberioribus ductibus vagantur. Typorum vſum Sini videntur cum his populis communicaſſe: eodem enim modo totas in aſſeribus exſculpunt imprimuntque paginas. Nuper tamen Ioannes Renatus Holmienſis apud Contaiſcham principem populi *Songar* (quos Calmuccos Orientales vocare ſolemus (1)) typographiam more Europaeorum inſtruxit litteris ſtanneis, quae aptari poſſint in voces et lineas. Sed ipſa in Iapania harumce litterarum veſtigia ex ſpeciminibus Kaempherianis deprehendi. Mungali primi omnium has litteras a Syris vel Iacobitis vel Neſtorianis acceperunt, quorum ad eam rem ope Gingiſcanus vſus fuit. Enimuero de his et diximus alibi,(2) et fortaſſis dicemus copioſius alio loco. Nunc enim conſtitui Mangjuricam litteraturam producere ſolam: qua cognita, parum difficultatis ſupereſt in Mungalicis litteris, nec ita multo maior in Calmuccicis. Cum eiusmodi diuerſitatem nondum ſentirem, crebro impegi. Alphabetum, quod primum in Germania edidi, ab amiciſſimo Caſpare Matthia Roddio, nunc Presbytero Nar

(1) Regionem illam vulgo vocant *Imperium Contaiſchae*, quod ſub *Contaiſcha* Principe maxime cognita fuit. Huic *Geldan-Sirin* ſucceſſit, vt iam nomen iſthuc amplius minime conueniat. (2) Videſis Epiſtolam *in der Hiſtorie der Gelehrſamkeit unſerer Zeiten* p. 385. et Actorum Lipſ. Supplem. Sect. I. T. IX. p. 20. et Acta ipſa ad A. 1731. p. 297.

Naruenſi A. 1716. accepi, cui id Gabriel quidam Mungalus in Siberia vtcumque deſcripſerat. Hoc mihi adiumento fuit, cum Elementa litteraturae Brahmanicae, Tangutanae et Mungalicae typis Sinicis edita explicanda ſumpſi. (3) Nactus deinde ſum tabulas geographicas excuſas in Sinis, in quibus vrbes, flumina, montes, lacus, loca alia extra moenia imperii Sinici, numero fere ad quatuor millia, ſcripta erant litteris Mangjuricis et Mungalicis. Et quod me in primis hic iuuit, adiecta erat ſeparatis in ſchedis interpretatio hominis Itali. Hic Italus legere ea ipſe non potuit, quod ex illius aberrationibus haud difficulter ſenſi, ſed lectorem adhibuit, cuius vocem, ſaepe non ſatis obſeruatam, litteris Italicis retulit. Praeterea tantum illius interpretationis apographo ſum vſus, in quo per quarundam litterarum Italicarum inter ſe conuenientiam, erratum etiam fuit ſaepius. Vtrumque incommodum tamen ſuperaui. Primum enim, quoniam is Italus partem quoque Sinicorum characterum intra murum iisdem in mappis more ſuo deſcripſerat: ita intellexi, quam earum litterarum, quas adhibuit, pronunciationem eſſe oporteret. Et cum in *Leao tum* nomina locorum paene omnia eſſent Sinica, litteris tamen Mangjuricis ſcripta, ex iis multo maxime fui confirmatus. Alterum incommodum diligenti obſeruatione ſuſtuli. Ita denique collato meo alphabeto Mungalico, tum Manuſcripto quodam Koleſeri de Keres-eer, viri ornatiſſimi, et tertio, quod Nicolaus Vuitſenius edidit, (4) incredibili labore nouum et perfectum omni-

(3) Vide hos Commentarios Tomo III. p. 389. et Tomo IV. p. 290.
(4) p. 121. in prima editione: nam in ſecunda hoc alphabetum omiſſum eſt.

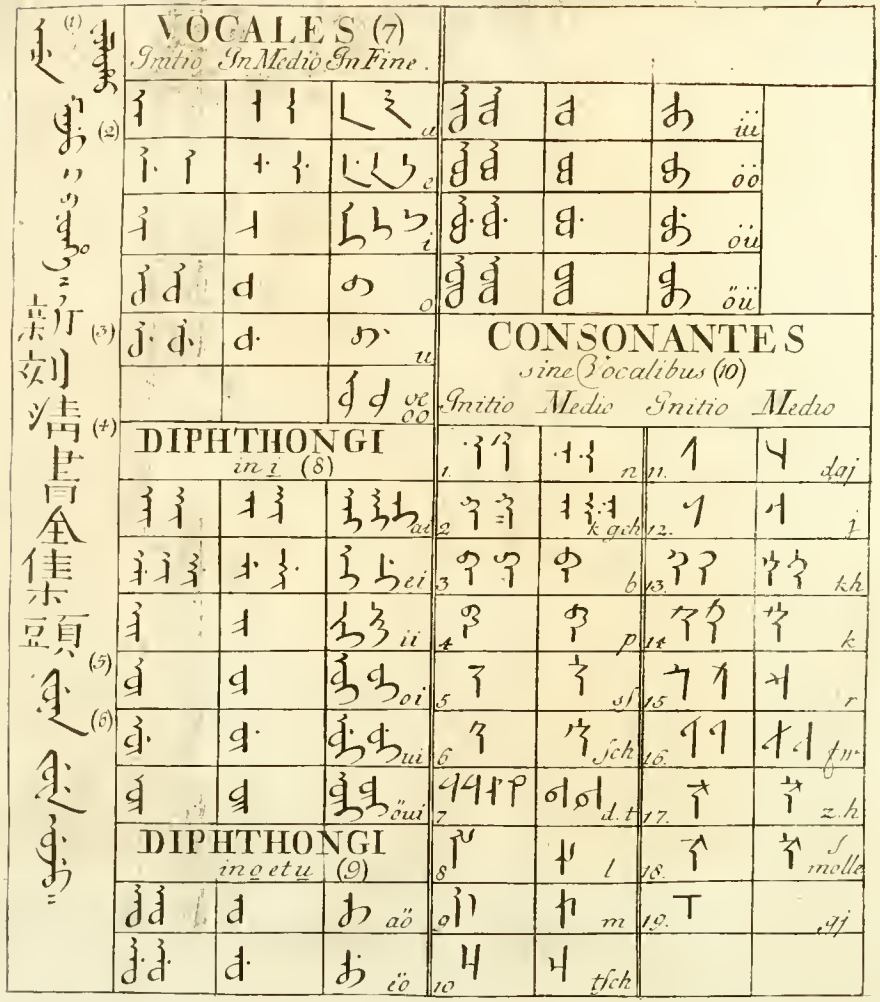
omnibus numeris, vt tum quidem mihi perſuadebam, condidi, ſed Mungalicis Mangjuricisque inter ſe permiſtis. Nondum enim Petropoli erat quisquam vnus, qui iſtarum litterarum vel tenui cognitione eſſet imbutus, linguarum tamen gnari ſatis multi erant. Igitur ducem adſciui Joannem Franciſcum Gerbillonium S. J. cuius grammaticam Mungalicam, tametſi ſine et nomine auctoris et litteris Mungalicis, Melchiſedecus Theuenotus in collectione itinerum rariſſima euulgauit. Hic Gerbillonius cum Joachimo Buueto octo menſes linguae Mungalicae operam dederat, cum *Kam Hi* Imperator eis, vt tanto magis proficerent, magiſtrum in aula dedit. Deinde eosdem iuſſit artes Europaeas eadem lingua ſibi explicare. (5) Gerbillonium cum primis in honore habuit, eundemque et omnibus in venationibus ſecum duxit et A. 1688. legatis ſuis adiunxit, qui in Selinginſca vrbe de pace agerent cum Ruſſis, quae pax anno poſt conuenit. Concinnauit idem quoque lexicon Mungalicum. (6) Poſt vbi ad Comitem Bruceum hoc meum alphabetum Moſcuam miſiſſem, is pro ſingulari liberalitate ſua mecum communicauit alphabetum Mangjuricum in Sinis maiori forma impreſſum, adſcripta pronunciatione Ruſſicis litteris. Accepi eiusmodi aliud elegantiſſima manu Pequini ſcriptum et Ruſſice explicatum. Denique nactus ſum libellum omnium et vtiliſſimum et tutiſſimae fidei, quem *Kam Hi* Imperator Pequini curauit typis imprimendum, adiectis characteribus Sinicis, qui vtcunque ſonum pronunciationis Mangjuricae

(5) Buuetus in Icone Regia p 61. ed. Leibnitii. (6) Vide epiſtolam Gerbilonii in Leibnitii Nouiſſimis Sinicis editam p. 171. De itineribus eius multa in opere Duhaldiano reperies.

		iü	
		öö	
		öü	
		öü	

ONSONANTES
sine Vocalibus (10)

	Medio	*Initio*	*Medio*
	n	11.	*dsj*
	k.gch	12.	*j*
	b	13.	*kh*
	p	14.	*k*
	sf	15.	*r*
	sch	16.	*ftw*
	d.t	17.	*z.h*
	l	18.	*s* *melle*
	m	19.	*sj*
	tsch		


VOCALES (7)
Initio In Medio In Fine.
a
e
i
o
u
ve öö
DIPHTHONGI in i (8)
ai
ei
ii
oi
ui
öui
DIPHTHONGI in o et u (9)
aö
eö
CONSONANTES sine Vocalibus (10)
Initio Medio Initio Medio
n
k gch
b
p
sf
sch
d. t
l
m
tsch
üü
öö
öü
öü
daj
j
kh
k
r
ftw
zh
s molle
aj

juricae referrent, ſunt enim ad eiusmodi aliquod inſtitutum ineptiſſimi. Hic ego nobilem virum Mangjurum, nunc Chriſtianum, adhibui, qui viua voce pronunciationem me doceret, quod ille, vt fieri eorum in ſcholis ſolet, canendo peregit.

Libellus hic more Sinico excuſus conſutusque, folia continet quatuor et viginti. Sed initium et libri et paginarum, more Mangjurico, a ſiniſtra eſt dexteram verſus, vt in paginis ſingulis apud Syros quoque fit, cum χαρτοφύλως ſcribunt. Ordo autem paginarum eſt diuerſus. Poſt nomen officinae librariae Mangjuricum, *I-tſche Folocho*, [1] titulus eſt, *Mangju-ni geren bidche*, [2] *Mangjuricarum litterarum liber*. Ita ſimiliter poſt nomen officinae Sinicum, *Sin ke*, [3] titulus *Çin xu çiven cie*. [4] Id eſt: *Mangjuricae litteraturae perfecta collectio*. Haec collectio elementorum in duodecim *teû*, [5] ſeu *capita* diſtributa eſt. Inde etiam alphabeto huic nomen Mangjuricum: *Tſchuen tſchue u-tſchu*, [6] id eſt, *duodecim capita*. In primo capite ſunt Vocales finales et Conſonantes in vocalium aliquam exeuntes. In ſecundo capite ſunt Diphthongi in *i* terminatae et conſonantes his diphthongis exeuntes in extrema vocis ſyllaba. Aliae diphthongi in *o* et *u* deſinentes, in decimo capite demum exſtant. Habet igitur totum hoc inſignem difficultatem, quod neque vocales, neque conſonantes, vt in mediis vocibus occurrunt, ſunt enim diuerſiſſimae, hoc in libro, aut aliis in alphabetis, quae conſecutus ſum, exſtant. Praeterea conſonantes non exſtant, niſi cum vocalibus iam de-

Tabula XVI. [1] [2] [3] [4] [5] [6]

nunctae in ſyllabas, vt rectius hoc, more noſtro, ſyllabarium dicas, quam Alphabetum. Quare hic ego tantiſper diſcedam a Mangjuris magiſtris et Europaea vtar methodo, quam mihi, vt ſemel a me deprehenſa eſt, vtilem fuiſſe viſam recordor. Attamen, quantum fieri potuit, ſeruabo Mangjurorum in diſponendo rationem, nulla alia cauſſa, quam vt, qualis illa ſit ratio, intelligatur. Nam alioqui compendia video, quibus vti queam.

Primum quidem ex Scripturae Syriacae ratione, in Mangjurica, Mungalica et Calmuccica lingua retinetur, vt lineae litterarum a ſumma pagina exarentur deorſum vsque ad imum paginae pedem. Hoc ſcribendi genus Dionyſii Thracis Scholiaſta et Euſtathius Theſſalonicenſis χαμαίφορον dixerunt, quo vocabulo vt aptiſſimo lubenter vtimur. Ita igitur, inquam, ſcribunt, vt Sini, modo tamen alio. Nam Sini lineas illas ſuas a dextera exordiuntur: Mangjuri item vt Syri a ſiniſtra. Cum vero hi populi ſchedas ſuas legunt, ſolent nonnumquam, iterum ad morem Syrorum, eas vertere, vt, quae χαμαιφόρως ſcripta fuerunt, ea legant a dextera verſus ſiniſtram. Idcirco Sinicum ſcripturae genus magis proprie eſt κιονηδὸν, vt Dionyſiani Scholiaſtae altera voce vtar. Scio, multos fore, qui, quid hic de Syris dicam, mirabuntur: aſt ego vera et comperta edidi mihique fidem adhiberi volo, neque enim hic locus eſt, vt id nunc ex inſtituto agam.

Litterae Mangjuricae, Mungalicae et Calmuccicae ſic ſunt factae, vt ad celeritatem ſcribendi magis etiam accomo-

accommodatae ſint, quam Syriacae. Nam vnaquaeque vox ſine interruptione, vna tamquam in linea perpetuo tractu cohaeret.

Vocales Mangjuricae ſunt vel ſimplices vel compoſitae. Vtrasque vide in Tabula [7. 8. 9.]. Tabula XVI. [7.8.9.]

Nota I. Vocalis *e* initialis ſemper aliter ſcribitur, quam ſi praecedat in ſyllaba conſonans.

Nota II. Quando vocalis ᠢ *i* ſolitarie ponitur, (quod huic vnicae accidit litterae) vocis praecedentis littera, finalium litterarum forma ſcribitur. Tum vero illud *i* indicat, praecedentem vocem in genetiuo eſſe poſitam. Si vox praecedens conſonante terminetur, hoc ᠢ pronunciatur *i*: ſin vocali, effertur vt *ni*.

Nota III. Diphthongi vel in *i* vel in *o* et *u* deſinunt. Sed diphthongi in *o* et *u* pronunciantur non vno ſono, verum vocalibus diremtis, quod ſignis διαιρήσεως indicaui. Nimirum *aò*, vti *a* et *o*: *eò*, vt *e* et *o*. De his etiam capite decimo dicendum erit.

Nota IV. Omnes vocales natae ſunt ex Syriacis ᠠ ᠡ ᠣ *a i o*. Vocales *e* et *u* per puncti ad dexteram diſtinguuntur ab *a* et *o*. Ceterae ſunt ex his factae et compoſitae. Haec enim puncta vocalium ſigna apud Syros vetuſtiora ſunt,

quam quae ex Graecis α ε ι η ο sunt facta. Illa ad S. Ephremum auctorem referuntur; qui circiter A. C. 373. decessit, haec ad Theophilum Edessenum, qui A. C. 785. obiit. (7) Et his quidem Maronitae vtuntur: illis Iacobitae et Nestoriani, quorum alterutros Gingischano litteras formasse diximus. Sed cum Syri puncta vocalia consonantibus frequentissime apponant, Mangjuri ceterique vocalem sine istis sulcris numquam scribunt. Hoc ipsum Syris vetustioribus et Chaldaeis in vsu et consuetudine fuisse opinor. Nam Mendaei, quos Christianos S. Ioannis nuncupare solemus, libros perueteres adhuc habent, permistis inter consonantes vocalibus. (8) Sunt duae aliae vocalium *iè*, obscuro sono, *i* et *e* formae, quae raro occurrunt. Vide infra capite secundo *Syllabas anomalas*. [12]

Tab. XVIII. [12]

Tabula XVI. [10]

Consonantium [10] formas, quales sunt sine vocalibus in principio et medio vocum, spectandas nunc propono. Sunt autem numero nouemdecim.

1. *n*. Hanc litteram punctum ad sinistram distinguit ab *a* vocali. Mungali hoc, vt omnia signa diacritica negligunt. Mangjuri quoque hoc punctum omittunt post vocalem et ante litteras *k* et *g*. Omittitur etiam in terminationibus *ang*, *eng* etc. de quibus infra, et in *n* finali, de quo etiam postea. Nonnumquam

(7) Vide Assemani Bibliothecam Orientalem Tomo I. p. 54 55. 64. 521. et Abrahamum Ecchellensem in notis ad *Ebed Iesu*. (8) Abrahamus Ecchellensis in notis ad *Ebed Iesu* p. 246.

numquam loco puncti ſcribunt lineolam, vt in tabula. N ante *b* et *p* fere pronunciatur vt *m*.

2. *k*, *g*, *ch*. Haec littera peculiare hoc habet, quod tribus iſtis modis pronunciatur, ſed vt vel vocalis pronunciationem certam definiat, vel circellus ad latus litterae. Hoc ex ſequentibus capitibus cognoſcetur planiſſime. In media littera caue, ne *k* confundas cum *na* aut *an*, praeſertim ſi forte punctum ad ſiniſtram praetermiſſum fuerit, quod nonnumquam contingit.

Nota. Scribitur etiam ſic: et in medio quod in finali *k* eſt frequentius, vt infra dicemus. Reperitur etiam ita: et *ſch* pronunciatur.

3. *b*.

4. *p*.

5. *ſ*. Sine *s* forti niſu protruſum, tamquam ſi duplex ſit *s*.

6. *ſch*.

7. *d* et *t*. Eodem fere modo, vt de littera ſecunda diximus, pronunciationis diuerſitate gaudet. Vide ſequentes tabulas. Scribitur ſaepe cum barbula quadam ſic:

8. *l*.

9. *m*.

10. *tſch.*

11. *pgj*, vt Perſicum , quod his litteris Latinis ſcribere ſoleo.

12. *j.*

13. *kh. gh. kch.* Differt a ſecunda littera, primo, quod lunula ad verticem minus in circellum reflectitur: ſecundo, quod in medio formam ſuam ſeruat: tertio, quod non iisdem vocalibus ſemper iungitur, quibus ſecunda, quarto quod durius in gutture pronunciatur. Solet etiam ſine lunula ad verticem ſcribi: tum vero magis incuruatur caput vt differat a quinta littera. In medio occurrit quoque duplicata vbi ſuperius caput ſemper paullo eſt minus, quam inferum. Tum vero *gk* pronunciatur: neque a me inuenta eſt aliqua in voce, niſi ſi praecederet *n.* e. g. *Ang-kuri*, *Tſching-kil*, *Seng-kle*, *Keng-kun.*

14. *k. g. ch.* Conuenit partem cum ſecundae, partem cum praecedentis natura litterae.

15. *r.*

16. *f*, *w.* Reuera duae litterae ſunt, ſed pro ratione vocalium inter ſe permiſtae, quod ex tabulis ſequentibus planius cognoſcetur.

17. *zh.*

18. *ſ*, molle, vt apud Germanos.

19. *gj*, vt Arabicum , quod *gj* ſcribere ſoleo, Italico ſono pronunciandum.

Nota.

Caput I. Consonantes Vocalibus terminatae (11.)

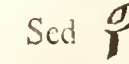
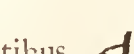
a	e	i	o	u	ŏ	oo
nu	ne	ni	no	nu	nŏ noo	13 khe
ka	caret		ko	caret	kŏ koo	ghe
ga	caret		go	caret	gŏ goo	ghe
cha	caret		cho	caret	chŏ choo	ki
ba	be	bi	bo	bu	bŏ boo	gi
pa	pe	pi	po	pu	pŏ poo	ghi
sha	she	shi	sho	shu	shŏ shoo	ku
scha	sche	schi	scho	schu	schŏ schoo	au
ta	te	ti	to	tu	caret	achŏ
da	de	di	do	du	caret	14 ka
la	le	li	lo	lu	lŏ loo	ga
ma	me	mi	mo	mu	mŏ moo	cha
tscha	tsche	tschi	tscho	tschu	tschŏ tschoo	ko
daja	daje	daji	dajo	daju	dajŏ dajoo	ao
ja	je	caret	jo	ju	jo joo	chŏ

Caput I. Consonantes Vocalibus terminatae (II)

a	e	i	o	u	ö oo	
1. na	ne	ni	no	nu	nö noo	13 khe
2. ka	caret		ko	caret	kö koo	ghe
ga	caret		go	caret	gö goo	3° ghe
cha	caret		cho	caret	chö choo	ki
3 ba	be	bi	bo	bu	bö boo	gi
4. pa	pe	pi	po	pu	pö poo	gchi
5. sha	she	shi	sho	shu	shö shoo	ku
6. scha	sche	schi	scho	schu	schö schoo	au
7. ta	te	ti	to	tu	caret	3° achö
da	de	di	do	du	caret	14 ka
8. la	le	li	lo	lu	lö loo	ga
9. ma	me	mi	mo	mu	mö moo	3° cha
10. tscha	tsche	tschi	tscho	tschu	tschö tschoo	ko
11. daja	daje	daji	dajo	daju	dajö dojoo	ao
12. ja	je	caret	jo	ju	jö joo	3° chö

	i	o	u	ő oo	
re	ri	ro	ru	rő roo	*Syllabae anomalae (12)*
fe	fi	fo	fu	fő foo	
we	caret ⌣				sië
zhe	zhi	zho	zhu	caret	tịchi
se	si	so	su	caret	dạje
gje	gji	gjo	gju	gjő gjoo	
llabae terminatae Diphthongis in i (13)					
nei	nii	noi	nui	női	
bei	bii	boi	bui	bői	
kei	kii	caret	kui	caret	*Sequentes* kei gei chui
gey	gii		gui		
chai	chei	caret		chői	*Sed* kui gui chai
yllabae terminatae in r (14)					
ner	nir	nor	nur	noir	*Scribitur etiam*
ber	bir	bor	bur	boir	nạr etc.
jer	caret	jor	jur	joir	

a	e	i	o	u	ö oo	
15 ra	re	ri	ro	ru	rö roo	*Syllabae anomalae (12)*
16 fa	fe	fi	fo	fu	fö foo	
wa	we	caret				sie
17 zha	zhe	zhi	zho	zhu	caret	tschi
18 ja	je	ji	jo	ju	caret	daje
19 gja	gje	gji	gjo	gju	gjö gjoo	
Cap. II. Syllabae terminatae Diphthongis in i (13)						
nai	nei	nii	noi	nui	nöi	
bai	bei	bii	boi	bui	böi	
caret	kei	kii	caret	kui	caret	*sed sequentes* kai kei kii kai kui chai
caret	gey	gii		gui		
	chai	chei	caret		chöi	*sed* kai gai chai
Cap. III. Syllabae terminatae in r (14)						
nar	ner	nir	nor	nur	noir	*scribitur etiam*
bar	ber	bir	bor	bur	boir	nar etc.
jar	jer	caret	jor	jur	joir	

Nota. Conſonantium in medio formas accurate adiecimus. Sed  et ſolent cum ſequentibus  et fere confundi. e. g.

Fabtan *Nemtemgte* *Nibtſchu, Fluuius*

Selinga et *Selingenſkoi orbs, in qua A.* 1689. *pax inita eſt inter Ruſſos et Sinos.*

Omnes vocales et quaedam conſonantes in fine aliter, quam in principio et medio ſcribuntur. Earum cauſſa a Mangjuris et Mungalis tot capita in his elementis conſumuntur. De ſingulis dicemus, quantum ſatis videbitur, cetera enim pro ſe quisque ex ſuperioribus ſupplere poterit. Et potuiſſemus haec quoque maiori compendio tradere: viſum tamen fuit, vel ea cauſſa Mangjuros eſſe ſequendos, vt ratio eorum tradendi ſuas ſyllabas diſcipulis, cognoſci queat. Inter docendum diſcendumque canunt, quod ad memoriam ſubleuandam proficuum eſſe iudicarunt.

Caput primum vocales finales continet et ſyllabas alias in conſonantium aliquam exeuntes. Vocales finales iam ſupra dedi. Conſonantes vocalibus terminatas prorſus eo ordine et numero, vt in libro ſunt, hic recitabo. Recinunt autem Mangjuri inter docendum: *na*, *ne*, *ni*, *no*, *nu nö*, ſeu *noo*, et ita porro. In ſecunda littera

Tabula XVII. [11] et Tab. XVIII.

littera *k*, *g*, *ch*, animaduertas, quemadmodum diuerſo modo ſcripta pronuncietur et vt formae vocalium in ea aliam naturam induant. Eadem animaduerſione in 7. 13. 14. 16. opus eſt. In 17. vide ſingularem vocalis *i* notam, quae vt *iè* ſeu *i ë* obſcuro ſono effertur. Iterum ea forma inter ſyllabas anomalas [12] cum duabus aliis formis vocalium hibridis occurrit.

Tab. XVIII. [12]

[13] Caput ſecundum continet ſyllabas terminatas diphtongis in *i* deſinentibus. Hae ſyllabae facile formari poſſunt ex praecedentibus. Ideirco tantummodo paucas exempli cauſſa exhibebo.

[14] Capite tertio ſyllabae deſinentes in *r* collocatae ſunt. Structura eſt perfacilis, ſi pauca haec exempla videas, ceteraque monita, quae ſupra dedimus, obſeruaueris. Sed inueni quoque haud raro ſic: *ſchar*.

Tabula XIX. [15] Capite quarto ſyllabae terminantur in *n*. Terminatio *an* et *en* cum terminatione *a* et *e* vocalium finalium congruere videbitur. Aſt in *an* et *en* ſemper vocalis eſt expreſſa, cum in *a* et *e* ipſa finalis lineola vocalis ſit, quae contra in hoc capite eſt *n* ſine puncto. Excipe *an* et *en* pura, i. e. nulla conſonante in ſyllaba praecedente, et *ban*, *ben*, *pan*, *pen*, quae vocali opus non habent, cum a *ba*, *be*, *pa*, *pe* finalibus vel ſic facile dignoſcantur.

[16] Caput quintum exhibet ſyllabas terminatas in *ng*, vt ſonum hunc ſic exprimere mihi liceat. Galli eum habent

Vubae terminatae in n (15.)

in	on	un	ön	
caret	kon	caret	kön	
caret	gon	caret	gön	
caret	chon	caret	chön	
bin	bon	bun	bön	Sic etiam pan etc. Nam ba et pa
sin	sson	sun	sön	Scribuntur

bae terminatae in ng (16)

ing	ong	ung	öng	
caret	schong	schung	schöng	
ling	long	lung	löng	
ring	rong	rung	röng	

bae terminatae in k (17)

ik	ok	uk	ök	
mik	mok	muk	mök	
tschik	tschok	tschuk	tschök	
dajik	dajok	dajuk	dajök	

Cap: IV. Syllubae terminatae in n (15)

an	en	in	on	un	ön	
kan	caret	caret	kon	caret	kön	
gan	caret	caret	gon	caret	gön	
chan	caret	caret	chon	caret	chön	
ban	ben	bin	bon	bun	bön	Sic etiam pan etc. Nam ba et pa
sfan	sfen	sfin	sfon	sfun	sfön	Scribuntur

Cap V. Syllabae terminatae in ng (16)

ang	eng	ing	ong	ung	öng	
schang	scheng	caret	schong	schung	schöng	
lung	leng	ling	long	lung	löng	
rang	reng	ring	rong	rung	röng	

Cap. VI Syllabae terminatae in k (17)

ak	ek	ik	ok	uk	ök	
mak	mek	mik	mok	muk	mök	
tschak	tschek	tschik	tschok	tschuk	tschök	
dajak	dajek	dajik	dajok	dajuk	dajök	

ek	caret	jok	juk	jök	
kek	kik	caret	kuk	At	kok
gek	gik	caret	guk	conſo-nans	gok
hek	chik	caret	chuk	ſequens	chok

Syllabae terminatae in ſ (18)

es	is	os	us	ös	Sic quoque in peregrinis uſch et uzh
pes	pis	pos	pus	pös	
ſes	ſis	ſos	ſus	ſös	

T. Syllabae terminatae in t (19)

et	it	ot	ut	öt	
net	nit	not	nut	nöt	
ca	ret	kot	caret	köt	
ca	ret	got	caret	göt	
ca	ret	chot	caret	chöt	
et	bit	bot	but	böt	
ſet	ſit	ſot	ſut	ſöt	

jak	jek	caret	jok	juk	jök	
	kek	kik	caret	kuk	At	kok
	gek	gik	caret	guk	consonans	gok
	chek	chik	caret	chuk	sequens	chok

Cap: VII. Syllabae terminatae in s (18)

as	es	is	os	us	ös	Sic quoque in peregrinis uzh et uzzh
pas	pes	pis	pos	pus	pös	
sfas	sfes	sfis	sfos	sfus	sfös	

Cap: VIII. Syllabae terminatae in t (19)

at	et	it	ot	ut	öt	
nat	net	nit	not	nut	nöt	
kat	caret		kot	caret	köt	
gat	caret		got	caret	göt	
chat	caret		chot	caret	chöt	
bat	bet	bit	bot	but	böt	
sfad	sfed	sfit	sfot	sfut	sföt	

voce terminatae in t (20)

it	et	ut	ët	kol kal gal chol
tschit	tsot	tschut	tschöt	kul gul chul
ret	jot	jut	jöt	kit gil chit
ret	kot	caret	köt	kut gut chut
ret	got	caret	göt	jul chut
ret	chot	caret	chöt	
rit	rot	rut	röt	

bae terminatae in b (21)

ib	ob	ub	öb	
nib	nob	nub	nöb	
dgjib	dgjob	dgjub	dgjöb	
ret	job	jub	jöb	

e terminatae in diphthongos o et u (22)

niu	nóo	nóu	nöu	
biu	bóo	bóu	böu	
jiu	jóo	jou	jöu	

Syllabae in media voce terminatae in t (20)

at	et	it	ot	ut	öt	
tschat	tschet	tschit	tsot	tschut	tschöt	
jat	jet	caret	jot	jut	jöt	
kat	caret	caret	kot	caret	köt	
gat	caret	caret	got	caret	göt	
chat	caret	caret	chot	caret	chöt	
rat	ret	rit	rot	rut	röt	

Cap. IX. Syllabae terminatae in b (21)

ab	eb	ib	ob	ub	öb
nab	neb	nib	nob	nub	nöb
dgjab	dgjeb	dgjib	dgjob	dgjub	dgjöb
jab	jeb	caret	job	jub	jöb

Cap. X. Syllabae terminatae in diphthongos o et u (22)

nao	neo	niu	noo	nou	nöu
bao	beo	biu	boo	bou	bŏu
fao	feo	fiu	foo	fou	fŏu

habent multis in vocibus. Compoſitus autem eſt hic character ex conſonante *n* ſine puncto et ex vocali *i*, nonnumquam, vt in vocalibus *o*, *u*, *oi* ex duplici *n* ſine punctis.

Caput ſextum continet ſyllabas terminatas in *k*. In iis vide, quam formam vocalis ſecunda et ſexta poſtulet. Tabula XIX. [17]

Capite ſeptimo ſyllabae in *s* terminantur. Harum forma ſyllabarum haud difficulter ex pauciſſimis exemplis intelligetur. Habent etiam terminationem in *ſch* et *zh*. Eam vero tantum in peregrinis vocibus reperi. Tabula XX. [18]

Caput octauum maioris momenti eſt. Syllabae hic ſunt terminatae in *t*. Nam forma haec aliquem ſeducere poteſt, vt vocalem *o* cernere ſe opinetur, cum reuera ſit conſonans, quam ſeptimo loco poſui. Id vero magis poteſt ex Calmuccica ſcriptura animaduerti, in qua haec conſonans clarius dignoſcitur a vocali. Praeterea non modo haec ſyllabarum in *t* exeuntium ratio in finalibus vocum occurrit, vt in ceteris capitibus, verum etiam in mediis vocibus. Eſt hoc in tota litteratura Mangjurica difficillimum. Idcirco huic capiti ſyllabas mediis in vocibus in *t* litteram exeuntes ſubiecci. Tabula XX. [19] Tabula XX. [20]

Caput nonum ſyllabas continet deſinentes in *b*, et caput decimum in *o* vel *u*. In his finalibus cauendum eſt, et caueri facile poteſt. Nam terminatio *b* caudam longius producit verſus ſiniſtram , altera quaſi retrahit . De hac iam dixi ſupra in diphtongis. Tabula XX. [21] [22]

Tab. XXII. [23] [24] Caput vndecimum in *l* et caput duodecimum in *m* desinentes litteras exhibet.

Ad postremum obseruari velim, multas esse voces plurium syllabarum, quas Mangjuri et Mungali raptim pronuncient et praecipue vocalibus in medio absorptis. Gerbillonius in Mungalicis haec exempla edidit:

Vsiha	lege	*Vs-ha*
Tosohon	- -	*Tos-hon*
Fusihun	- -	*Fus-hun*
Vasihun	- -	*Vas-hun*
Asi-han	- -	*As-han*
Esukieme	- -	*Eskieme*
Ketukeleme	- -	*Ketoleme.* etc.

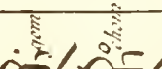
His ad aliquam haruncce litterarum notitiam fruamini, donec alii plura proferent.

DE

Syllabae terminatae in l (23)

el	il	ol	ul	öl	
nel	nil	nol	nul	nöl	
bel	bil	bol	bul	böl	
mel	mil	mol	mul	möl	
l	lil	lol	lul	löl	

Syllabae terminatae in m (24.)

m	im	om	um	öm	
nm	nim	nom	num	nöm	
k	caret	kom	caret	köm	
	caret	gom	caret	göm	
	caret	chom	caret	chöm	
m	bim	bom	bum	böm	
m	sim	som	sum	söm	
m	caret	schom	schum	schöm	
n	tim	tom	tum	caret	
n	dim	dom	dum	caret	

Cap. XI. Syllabae terminatae in l (23)

al	el	il	ol	ul	öl	
nal	nel	nil	nol	nul	nöl	
bal	bel	bil	bol	bul	böl	
mal	mel	mil	mol	mul	möl	
lal	lel	lil	lol	lul	löl	

Cap. XII. Syllabae terminatae in m (24.)

am	em	im	om	um	öm	
nam	nem	nim	nom	num	nöm	
kam	caret	caret	kom	caret	köm	
gam	caret	caret	gom	caret	göm	
cham	caret	caret	chom	caret	chöm	
bam	bem	bim	bom	bum	böm	
ſam	ſem	ſim	ſom	ſum	ſöm	
ſcham	ſchem	caret	ſchom	ſchum	ſchöm	
tam	tem	tim	tom	tum	caret	
dam	dem	dim	dom	dum	caret	

DE
LEXICO SINICO
Çù gvéy.
T. S. B.

INter cetera Lexica Sinica, non vltimo loco cenſetur 彙字 *çù guéy*, ſiue *litterarum copioſa collectio, claſſibus ſuis et capitibus diſtincta.* (1) Tres editiones libri vidi. Prima erat ex officina 麒麟王 *Ỳo lín.* Ambitioſum nomen. Nam *yo, gemmam et quidquid deinde pretioſum eſt*, ſignificat, vt hoc loco *Ỳo lín, pretioſa vnicornis* dicitur. Foemella eſt *lín* maſculus 麒其 *ki.* Mirifica de hoc animali traduntur, eſtque Sinorum opinione hic rex, illa regina animantium. Raro apparet, cum, ſicuti aiunt, rex optimus et ſapientiſſimus vel regnaturus ſit, vel ingreſſus fuerit imperium: omnem enim populi felicitatem portendit. Quare in Annalibus Coupletianis ad certos annos 麒麟 *ki lin* viſi mentionem conſignatam reperietis. (2) Et Confucius ipſe in *chun cieu* ſeu hiſtoria ſui temporis, ipſo in fine teſtatur, tum maxime

(1) Gvéy. Collectio, abundans copia, genera ipſa, prouti comprehendunt ſpecies, vel ſpecies, quae continent ſua indiuidua. Lexicon R. P. Parrenini.
(2) Vide e. g. Monarchiae Sinicae tabulam Chronologicam p. 2. 14.

xime *lin*, seu *vnicornem* visam fuisse. Altera editio, quam ipse possideo, ex officina 本原 *yv ên puèn* prodiit. Totidem in hac editione libelli, paginae item superioris editionis paginis congruunt, tantummodo minor huius forma est, et in extremo codicillo quaedam immutata aut praetermissa fuerunt. Tertia editio officinam nacta est 辟辛聯珠 *Liên pie*, et quidem, vt additur, 麟新年二正續 *Jum chim ulh nien sin civen*, *Jung Tsching* (*Imperatoris*) *secundo anno*, *editio noua*. Is fuit A. C. 1724. Praefatio in ea alia, in toto autem volumine iterum paginae priorum editionum, huiusce paginis congruunt. Nos in hac commentatiuncula primam editionem maxime respiciemus, quae praeterea in titulo dicitur 訂重麟 *civén chúm tim*, *editio seuere examinata et correcta*.

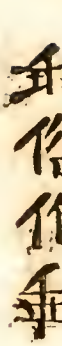
Totum huius lexici volumen, XIV. codicillos continet. In primo codicillo primum est 序 *siú* i. e. *Praefatio*, litteris paullo maioribus et elegantissimis. Sequitur 纂目 *mo lo*, *Index* omnium radicalium secundum classes suas ipso in lexico dispositarum, subiecto calculo, quot sub quauis radicali litterae contineantur. Illo ex calculo numerum omnium litterarum huius

huius lexici producam poſtea. Eſt deinde 首卷 *xeù kivên*, *primus codicillus.* (3) Nimirum praefatio et index ille non cenſentur in numero primi codicilli. Primum autem eius caput eſt 運筆 *yún pie*, *motus penicilli*, in quo per quinque folia demonſtratur, quemadmodum litterae, praeſertim magis compoſitae, quoue ductuum penicilli ordine ſcribendae ſint. Ponam hic exemplum duntaxat vnicum:

畢 *In hoc characlere*,
先 *ſien*, *prius* (*ſcribe*, *vti ſequitur*)
田 (*ſic inquam*)
欠 *çú*, *deinde* (*ſcribe*)
丗 (*hunc characlerem*)
次 *çú*, *poſtea*
丨 (*hanc lineolam*).

Alterum caput foliis tribus 古从 *çûm cù*, *ſimplices antiquos characleres* continet, qui hodie paullo aliter ſcribuntur, ita vero, vt etiam antiqui fere adhuc conſeruentur. ex. gr.

(3) Xèu, proprie, caput hominis, animantis, principium, et ſaepe numeri primi loco adhibetur. Kivên, libri totius minor particula, qualem codicillum appellare ſoleo.



(*Hic character*)
ſo ſolet
ço fieri
(*in hunc modum*)

Tertium caput foliis duobus 時遷 *çò, xi*, (*Conformatio temporum*,) comparationem characterum nouorum atque obſoletorum complectitur, hunc in modum:

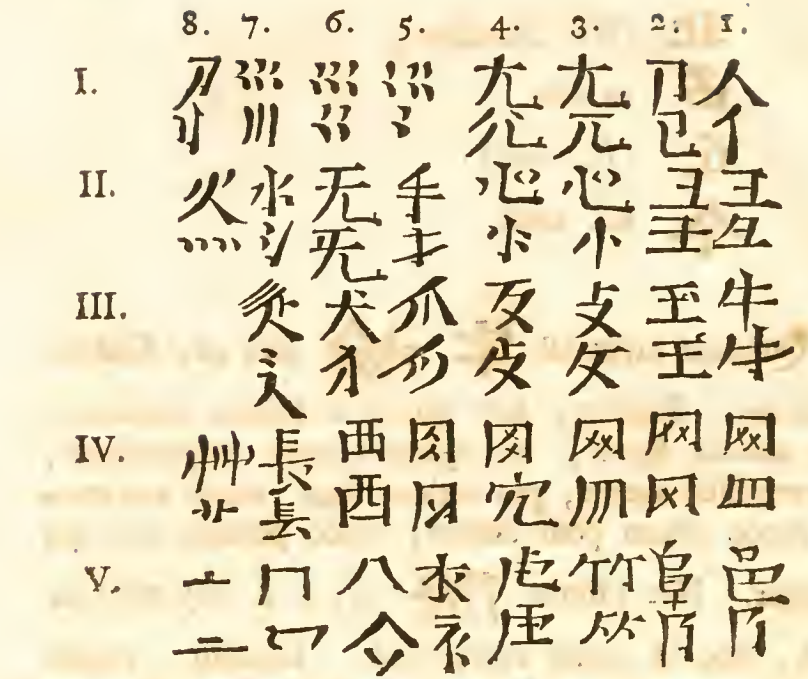
(*Hic character*)
cù olim
ço fiebat
(*hoc more*)

Quartum caput tribus foliis eiusdem naturae argumentum continuat modo tituloue alio. Dicitur enim 用通今古 *cù kīn tūm yùn*, *antiquus et nouus explicatus vſus*. Characteres veteres praemittuntur noui ſubiiciuntur, ſic:

(*Hic*

止 (*Hic character*)
古 *cù olim*,
丘 (*hic vero*)
今 *kīn. hodie.*

Quintum caput eſt 字檢 *kièn çú*, *Examen litterarum.* Scilicet, ſunt quaedam litterae radicales, quae diuerſa figura, ad ſignificationem aequipollent, in compoſitis autem, pro ratione ſitus, modo vno modo, modo altero poni debent, modo perinde eſt, qui ponantur. Hae litterae 附 *fú*, i. e. *conſanguineae* dictae, hoc in capite recenſentur. Easdem, vtpote cognitu perneceſſarias hic deſcribam ita, vt ſuperior *ſeries*, characterem vnumquemque extra compoſitionem, inferior eiusdem aequipollentem in compoſitione ordine ſuo exhibeat.



I. Series.

1. *gin*, *homo*, vt in ſecundo ordine eſt, numquam niſi in compoſitis et quidem ad ſiniſtram tantum occurrit.

2. *cie*, *teſſera fidei*, ſecundi ordinis, tantum in imo compoſitorum.

3. 4. *yêu*, *defectus non voluntarius*, cum characteribus ſecundi ordinis in compoſitione permutatur. Sed primus ſecundi ordinis etiam radicalis eſt *yvên* (origo) neque huc pertinet.

5. 6. 7. pro his primi ordinis characteribus ſaepe ſecundi ordinis *kivén*, *cai*, *chuen*, veluti aequipollentes ponuntur.

8.

8. *tao*, *culter*, *gladius*. Sed alterius ordinis littera tantummodo in compoſitis et quidem a dextera exſtat, vnico exemplo inter duas radicales mediam vidi in lexico *Hai pien*.

II. Series.

1. 2. *kî*, *porcus*, in compoſitis fere, vt in ſecundo ordine, et prima quidem earum in ſummo.

3. *ſīn*, *cor*, in compoſitis a ſiniſtra non poteſt aliter occurrere, quam in ſecundo ordine eſt.

4. *ſīn*, *cor*, altera forma ſecundi ordinis etiam occurrit, ſed non a ſiniſtra.

5. *xeù*, *manus*, in compoſitis ſic, vt in ſecundo ordine et tantummodo a ſiniſtris: vnicum exemplum in ſummo reperi in lexico *Hai pien*.

7. *xuì*, *aqua*, a ſiniſtra tantummodo vt in ſecundo ordine.

8. *ho*, *ignis*, in imo tantum vt in ſcundo ordine.

III. Series.

1. *niêu*, *bos*, a ſiniſtris, vt ſecundo in ordine.

3. *yo*, *gemma*, a ſiniſtris tantum, vt ſecundo in ordine, alias vtroque modo. Eſt et radicalis eiusmodi *vàm*, *rex*, ſed ab auctore huius lexici eodem refertur.

3. 4 aequipollent.

5. *chaò*, *quadrupedum et volucrum* vngues in ſummo, vt ſecundo in ordine.

6. *kau*, *canis*, a ſiniſtris, vt ſecundo in ordine.

7 *chò*, *lignum transuerſum*, *quo aqua praecluditur*, a ſiniſtris, vt ſecundo in ordine.

IV. 1. 2. 3. 4. *vam*, *rete*, aequipollent.

5. *yò*, *caro*.

6. *ſy*, *ſeptemtrio*.

7. *chám*, *ſupereſſe*, *excedere*, et *chàm*, *creſcere*, a ſiniſtris compoſitorum, vt ſecundo ordine.

8, *çao*, *herba*, in ſummo compoſitorum tantum vt ſecundo in ordine.

V. Series.

1. *yé*, *villa*, *pagus*, in regionum et locorum characteribus tantum a dexteris, vt ſecundo in ordine.

2. *ſui*, *collis fertilis*, ſemper a ſiniſtris, vt ſecundo in ordine. Ambo characteres cum ſcribuntur penicillo, immo etiam in editis, figura ſua cum conueniunt.

Sed multo ſunt plures litterae, quae eodem modo aequipollent et in compoſitionibus ſuam ſtationem tenent, ex. gr.

3. *chò*, *arundo*, vt in ſecundo ordine.

4. *hū*, *tigris*, in ſummo fere, vt in ſecundo ordine.

5. *ȳ*, *vehis*, vt in ſummo in ſecundo ordine.

6. *gin*, *homo*, ſi in ſummo characteris compoſiti exſtet, vt in ſecundo ordine, duobus modis.

7. *kiūm*, in ſummo vt in ſecundo ordine.

8. *teu*, caput, in ſummo, vtroque modo.

Haec tantummodo exempli cauſſa produximus, eſſent enim multo plura commemoranda nobis, ſi haec vellemus perſequi. Iam neceſſe eſt, vt characteres ſecundi ordinis in lexico quaeras, iuxta primi formas ordinis, cum plerique ſecundi ordinis extra compoſitionem litterariam ſolae non occurrant.

Denique recenſentur in Lexico *çù gvey* omnes characteres, qui in ſe quodammodo perfecti, radicalium vicem praeſtare poſſunt, a prima Claſſe ad XXXIII. Et cum in *çù gvey*, vt poſtea dicam, neque tot claſſes, neque tot radicales ſint, hic ad characteres, qui in alias relati ſunt claſſes, annotatum fuit, quo ſint loco inueniendi. Qui index vel maxime hunc vtilitatem praeſtat, vt in dubiis, multiplicique varietate deuinctis radicalibus cognoſcere poſſis, ad quam radicalem vnusquisque in Lexico relatus ſit character. Praeterea illo in indice habemus catalogum omnium fere characterum perfectorum, qui ex nouem elementis primis per artem combinatoriam conflati, nouas inter ſe iterum combinati litteras pariunt. Et claſſis quidem XXXIII. fere vltima eſt, in qua totidem elementa prima characterem vnum conſtituunt. Inueni tamen in *Hai pien* hunc characterem qui ex XLI. elementis et duabus radicalibus litteris compoſitus fuit, ita vt ſuperior

claſſem XXXIV efficiat. Enimuero in lexico *çu gvey* et *Hvi pien* vaſti illi characteres ad minores claſſes quomodocunque referri ſolent.

Opus ipſum lexici in duodecim codicillos eſt diuiſum : vnusquisque codicillus ex cyclo duodenario nomen habet, adiecta voce 集 *cĭe*, vt *çu cĭe*, *cheu cĭe* etc. *Cĭe* autem *Collectionem* ſignificat. Primus ipſius Lexici codicillus, ſeu ſecundus totius operis et voluminis, etiam 三才 *ye ulh çiè ſin* vocatur, *duodecim filiorum cor*, 小 in qua appellatione duodecim filii iſti, ipſi codicilli ſunt, qui quaſi naſcuntur. Cum vero Sinenſes autumant, cor hominis primum omnium in conceptione exſiſtere, eo primam claſſem elementorum tamquam parentes, ſecundam tamquam conceptionem conſiderant. Haec duodecim *cĭe* comprehendunt XVII 畫 *hŏe*, *compoſitiones litterarias*, quas ego *claſſes* vocare ſoleo. Secundus totius voluminis liber, quem primum ipſius lexici iam ſupra dixi, comprehendit primam claſſem ſeu elementa prima et ſecundam claſſem, in qua bina elementa prima in ſingulas litteras coaleſcunt. Tertius voluminis et quartus codicillus exhibent claſſem tertiam, ſeu eius 前 *çiên*, *partem priorem* et 後 *heú*, *partem poſteriorem*. Quintus, ſextus et ſeptimus continent claſſem quartam, ſiue

ſiue eius 上 *xam*, *partem ſuperiorem*, i. e. primam, 中 *chum*, *mediam*, i. e. ſecundam, et 下 *hia*, *inferiorem*, i. e. tertiam. Octauus codicillus claſſem quintam complectitur. In nono vero codicillo atque deinde etiam in decimo, claſſis eſt ſexta; in vndecimo eſt ſeptima: in duodecimo octaua et nona: in tertio et decimo ſunt claſſes a decima ad ſeptimam et decimam. Vltima claſſis, vocatur quoque 至書 *hoe chí*, *claſſis non plus vltra*, ſeu, *poſtrema*.

In indice huius lexici, de quo ſupra dixi, non modo radicales lexici ordine ſuo recenſentur, ſed numeri quoque compoſitarum litterarum ſubiiciuntur, ita vt radicalis quisque ſub eodem numero comprehendatur. Sunt igitur.

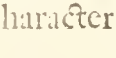
Claſſes		*Radicales.*		*Litterae in vniuerſum.*
I.	*In ea*	6		101
II.	– –	23		1810
III.	– –	31		4502
IV.	– –	34		13238
V.	– –	23		3443
VI.	– –	29		5621
VII.	– –	20		3209
VIII. IX.	–	20		3115
X. XVII.	–	28		3056
		214	(4)	38095.

(4) Has reſpexit P. Cima apud Leibnitium in epiſtolis a Kortholto editis T. I. p. 378. Plures enim re vera ſunt, quam in hoc lexico continentur.

Sic nos calculo inito inuenimus, quamquam in praefatione lexici tantummodo 33279 annummerantur. Sed multi characteres ſub diuerſis radicalibus repetuntur: haec res multitudinem tantam facile potuit in maius augere, cum tanti nobis non fuerit viſum hoc negotium, vt cum maximi diſpendio temporis, nihil agendo, neſcio quid certi reperiremus. In lexico autem *Hai pien*, de quo alias dicemus, characterum numerus ad ſeptuaginta millia aſcendit: in iis vero iterum atque iterum poſitorum, praeterea obſoletorum magna eſt copia, magna aliorum, qui rariſſime occurrunt, multi tamen in iis ſunt non infrequentes, qui in *Çu gvey*, non reperiantur.

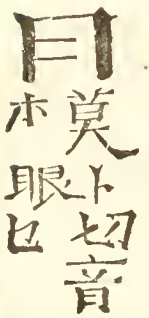
Sed videamus nunc interiora huius lexici. Quemadmodum apud nos in ſuprema cuiusque paginae linea titulum vel libri vel capitis et numerum paginae ponimus, ita Sini id ipſum exhibent in margine. Nam cum charta Sinica pertenuis litteras aduerſae impreſſas, in auerſa quoque praebeat tranſparentes, ad obtegendam foeditatem et vt manibus ſecurius tractari queant, folia in medio complicantur, extrema autem cornua conſuuntur. In ipſa marginis plicatura, ſumma regione, aliis in libris, eorum nomina vel ſectiones, hoc autem in lexico illae ex cyclo duodenario codicillorum appellationes, in imo margine numeri foliorum ponuntur. Character radicalis maioribus ductibus, libero deinde lineae iſtius ſpatio, vt magis oculos aduertat, deſcribitur, adiecta tantummodo littera 亩 *pu*, quod *caput* ſignificat, vel *ſectionem*, vel quomodocumque noſtro more

more interpretari velis. In proxima linea idem character radicalis, maiori item forma repetitur, subiecta minoribus litteris explicatione Sinica. Succedunt deinde maioribus litteris derivata et composita, pro ratione classium, ad quas vnaquaeque littera, quae radicali adiungitur, collocari solet, dispositi, intermistaque minoribus litteris interpretatione. Haec ego *capita* nuncupare soleo. Quotiescumque caput nouum incipit, numerus eius albo colore in circulari nigroque spatio satis grandis lectorem aduertit. Sed in postremis capitibus vastiorum ex combinatione litterarum numeri fere praetermitti solent, ita, vt quae post XV. Classem sunt litterae, quarum nonnumquam insignis est copia, vnum illud in caput abstrusae reperiantur. Quemadmodum haec res quaerenti saepe molesta est, sic alia est multo molestior, de qua nunc dicam. In combinatione potest radicalis secum componi, potest ad latus eius dexterum vel sinistrum, tum vel in summo vel in imo alius character adiici, potest radicalis in medio aliarum litterarum collocari, potest denique in se ipso insignem mutationem subire. At Sini in lexicis suis hoc pensi non habent. Quocumque situ character alius radicali accedat, eodem in capite reperietur, modo ad eandem classem pertineat: ita fit, vt inter quaerendum, oculis varium ad situm circumferendis, defatigemur. Cui malo vt mederer, meo in lexico, quod paro, situs varios litterarum distinxi, easque appellaui *sectiones*. Igitur cum compositam litteram in lexico *Çu gvey* indagare voles, quae ex duabus radicalibus aut pluribus in vnam sit conflata, primum nouisse te oportet, quae radicales

dicales in hoc lexico veluti duces inueniendi compoſitas adhibeantur. Eam autem radicalem in vna ex XVII. claſſibus reperies. Tum in adiuncto characterе numerantur elementa prima. Si fuerint e. g. octo aut duodecim, in octauo aut duodecimo capite totum characterem inuenies. Sed, vt hoc dilucidius ſcias, exemplo rem declarabo. Sit character tibi quaerendus  in quo tres ſunt radicales. Medium ſcire te oportet in *çu gvey*, tamquam radicalem, non occurrere, ita deinde memineris characterem a dexteris, vt ſupra monui, eſſe et aequipollere τῷ hunc autem ex ſeptem elementis primis conſtare, itaque in VII. Claſſe reperiri. Sed non placuit auctori lexici, characterem illum compoſitum ad hunc radicalem referre, idcirco in tertio qui a ſiniſtris eſt, et qui tribus elementis conſtat, tertia in claſſe requires. Iam duo characteres huic radicali cohaerentes, ſecundum leges, quas huius auctor lexici ſibi dedit, ex octo elementis primis confecti ſunt, igitur ſub illo radicali, capite octauo characterem deſideratum inuenies. Non vbique tantum operae eſt impendendam, in quibusdam tamen etiam amplius.

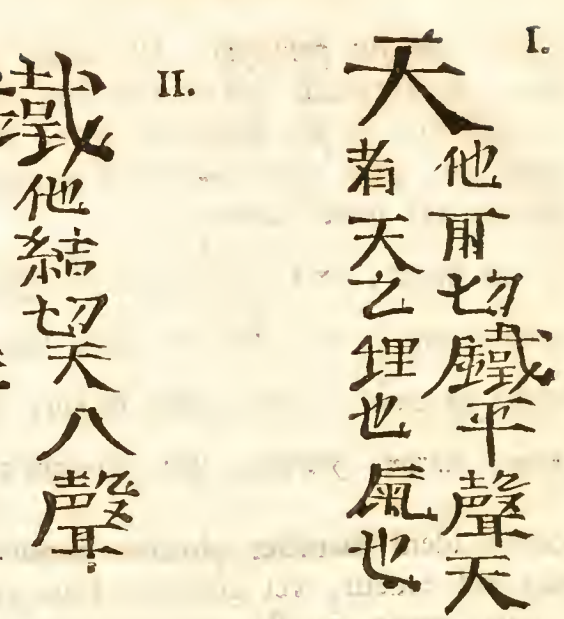
Minoribus litteris primo pronunciatio, deinde ſignificatio ſubiecta eſt, hunc in modum:

Illum

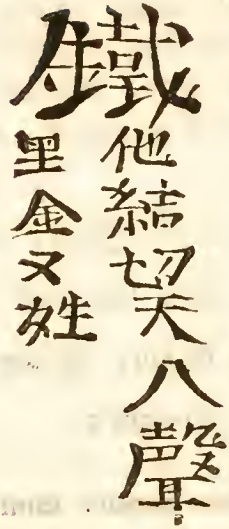


Illum characterem ſi pronunciare voles, *mo ꝑo cie*, ex *mo* initium, ex *po* finem *abſcinde*, erit *mo*. Nam *cie* ſignificat, *paulatim, non uno ictu ſcindere, abſcindere, diſcindere*, eſtque hic vocabulum technicum. Cum autem *mo* variis accentibus pronunciari poſſit, adiicitur, *yn mo*, *pronuncia mo*. Nam hic character plane ſic pronunciatur, vti is quem explicandum ſuſcepimus. Denique ſequitur, *yèn yè*, *oculus eſt*. Nonnumquam alius character, qui ſimiliter pronunciaretur, non occurrit, tum vero quemcumque accedentem propius ad ſyllabam illam producit auctor (ſiue omiſſo illo *yn*, i. e. *pronuncia*, ſiue adiecto) et accentum quo vox efferri debeat, nominat, vt duobus exemplis declarabo.

I.



II.



I. Hic character *tā çien cie*, ex *ta* prima littera ex *cien* vero terminatione *disſecta*, pronuncianda eſt, et quidem, vt ſequens character *tien*. Sed accentus alius eſt, nimirum, qui vocatur *pim xim*. De eo vide Muſeum Sinicum. (5) Sequitur explicatio: *tien chè* (*chè* eſt expletiua et vocem ſuperiorem diſtinctius determinat) igitur *tien* (*iſthuc*) *ly' yè*, *materia prima eſt*, *lumen rationis*, *recta rerum ratio*, *primum rerum omnium principium immateriale*, *materia prima a principio rebus omnibus inhaerens*, *res omnes*

(5) T. I. p. 12.

omnes cum ſuo principio. Iſta enim omnia characterе et vocabulo *ly'* exprimuntur. Additur alia ſignificatio: *kí yè, materiale rerum omnium principium eſt, quod cum immateriali principio, ly', intrinſece res omnes componit.*

II. Ex *ta* finem, ex *kien*, initium *cie diſſeca*, erit pronunciandum, vt character *tien*, ſed cum accentu dicto *ge xim* (id eſt, *tien*) *hĕ kàn*, *nigrum* (*obſcurum*) *aurum*, *yeu teù*, *item formaſura.*

Saepe idem character pluribus modis enunciatur, ſententia vel eadem, vel diuerſa. Haec vero ſubiici ſolent, priori parte circello quodam finita. Incepit protinus ⊼ *yeu*, *vel*, *item*, et ſi pronunciatio fuerit alia, eodem modo, vt ſupra diximus, res procedit. In citationibus auctorum et ſcriptorum ſic egit auctor lexici, vt nomina illa quibusdam octogonis includeret, quod in ſubiecto exemplo cernetis. In eodem cernetis aliud artificii genus, quod in reducendo characterе ad ſimpliciora elementa, ex quibus compoſitus eſt, verſatur, inde iam deſcriptionem ipſius rei fieri demonſtrat. Scilicet, nouem elementa prima, (tot enim reuera ſunt) certas ideas comprehendunt, quas in claſſe ſecunda ad definitiones rerum combinare auctorem harum litterarum voluiſſe, non obſcurum eſt. In maioribus claſſibus hoc maxime apparet. Nam quaecumque in compoſitione adiunctum habent characterem, *auis*, *piſcis*, *herbae*, *aquae*, *canis*, *ignis*, *auri*, *gemmae*, aliaque eiusmodi,

eaedem illis ſub generibus tamquam ſpecies continentur, aut tamquam adiuncta proprietatesque ad iſta genera referuntur, aut certe ex tropo aliquid habent, cur iſtae litterae adiectae ſint. Sed neque in omnibus eadem facilitas iſthuc ipſum explicandi, neque in minoribus characteribus ratio talis item plane explicari poteſt. Itaque diſſidia inter lexicographos eſſe ſolent, aliis aliter characteres ſuos deriuantibus, quod cumprimis contingit in rebus, quae ſenſus humanos fugiunt ſoloque intellectu capiuntur, vbi iſtae picturae ad ſimilitudinem cogitationum idearumque humanarum admodum ſunt rudes et obſcurae. Non nego, potuiſſe ſubacto ingenio virum in his, ad naturae idearumque noſtrarum imagines ordinandis, multo ſagaciorem ſeſe praeſtare, nunc autem, cum tanta in *Ly çu* harum, 240. ante Dionyſianam epocham annis, auctore litterarum facultas non fuit, aut cum a rudioribus vetuſtatis characteribus longius diſcedere non auderet, ſatius eſt iſtam enodandi minores characteres curam praetermittere. (6) Exempli corum quae diximus, cauſſa, ſumemus litteram vocemque in maximis controuerſiis verſatam. (7)

聖

式正切

xé
chím } *Abſcinde* ex *xé*, initium, ex *chím* finem,
cie. } (vt ſit pronunciatio characteris, *xim.*)

vn

(6) Ex his apparet, quid iudicandum ſit de Leibnitii ſententia in epiſtolarum Tom. I. p. 395 (7) In çû gvéy, libro 9. p. 72.

音 *yn̄* Immo *pronuncia* vt ſequentem

勝 *xím.* *xím̄.*

人之 *gîn* / *chī* } *Homo.*

至也 *chī* / *yè.* } *ſummus*, *perfectus*, vt *non poſſit ſupra.*

睿也 *pû* / *yè.* } *Ingenii acumen*, *ſeu ingenium ad res aptum.*

周書 *Chēu* / *xū.* } *Chēu xū* (liber quartus eius, qui inter quinque Claſſicos dicitur 四經書 *xū kim̄*) ſic ait:

睿 *pû* *Ingenii acumen*

作 *çó* *facit.*

聖 *xím* *ſapientem*: ſeu, *cum ingenii acumine facit ſapiens*,

又通也 *yeu* *et*
tum } *intellectu penetrat et quasi perrumpit ad*
yè. } *dit res omnes, et intelligantur.*

孔氏傳 *Cùm* } *Cùm xi chúen* liber sic ait: (lego
xi } *chuén*, q. d. *Confucianae familiae*
chuén. } *commentarius*: alioqui *chuèn* esset,
Confucianae familiae propagata ad
posteros virtus seu dignitas.)

於 *yu* *In*

事 *sú* *negotiis*, *officiis*, *muniis*

無 *vû* *non est*

所 *sò* (*locus*) *aliquid*

不 *pú* (quod) *non*

通 *tūm* } *penetret et recte introspiciat* (i. e. si
in rebus agendis nihil sit, quod quis
non introspiciat, ille)

謂 *gvéy* } *dicitur*

之 *chī* }

聖 *xím.* *xím.* (Itaque vocabulum, *xím* commode reddemus *sapientem.*)

yéu *Item*

又 *Yéu* *Item*

又姓 *sím.* *familia eſt*, ſeu *cognomen familiae.*

又 *Yéu* Item:

諡法 *xí* l. *xé* *ſa* Liber *xi ſa.* (De eo ſic ad me R. P. Parrenin : *Liber, qui non ſpectat ad viuos, ſed ad defunctos imperatores, reges, inſignesque etiam praefectos etc. continetque varias formulas laudationum funebrium, quibus decorari debent reſpectiue ad vniuscuiusque praeclare aut fortiter geſta ſculpique in marmore.*)

揚 *Yâm* *Publicauit, diuulgauit*

善 *xén* *aliena merita et fortiter geſta,*

賦 *fú* *recepit parce moderateque*

簡 *kièn* *tributum* (i. e. Si Imperator aliquis dum viuat, aliorum praeclare geſta non celet, ſed in honore habeat, ſique tributa moderate exigat, is, ſcilicet poſt mortem.)

日 *yē* *dicitur* (ſeu *meretur dici*)

聖 *xím* *xím.* (Quod recte nunc reddi poteſt, *iuſtus*, et vt veteres Romani dicere ſolebant, *vir ſanctiſſimus.*) *kím*

敬 *kím* (Qui etiam) *honore prosequitur*

賓 *pīn* *hospites*

厚 *heu* } *magnaque excipit urbanitate*
禮 *lì* }

曰 *yvē* *dicitur*

聖 *xīm.* *xim.*

○ (Punctum completum)

說文 *xúi* } Liber *xúi ven:*
vên: }

从 *çûm*, *simplicia elementa*, (ex quibus character *xím* est compositus, sunt)

耳 *lh* *auris* et

呈 *chīm* *ab inferiori ad superiorem*, *ab imo ad sublime quae referuntur* (unde 子呈 *chīm çu*, *libellus supplex*)

xim.

聲 *xim.* *pronunciantur* (in illo charactere.)

通論 *Tūm* / *lun* } Liber *Tūm lun* (ſic habet:)

通 *Tūm* Qui *penetrat*

而 *lh* *et*

先 *ſien* } *praeſcit* (res per cauſſas et proprietates ſuas)

識 *xe* }

曰 *yve* *dicitur*

聖 *xim.* *xim.*

於 *yu* *In*

文 *vên* *compoſitione*

耳 *lh* *lh* (littera, et)

呈 *chim* *chim*

爲 *gvêy* *efficiunt*

聖 *xiḿ*, *xim* (characterem, ſ. quamuis illae ſimplices litterae hunc characterem efficiant, tamen)

从 *çuḿ* } *Particula lh*
耳 *lh* }

非 *ſi* *non*

在 *çai* *eſt*

耳 *lh* } *auris ipſa.* (i. e. *non auris facit xim* ſeu
也 *ye* } *ſapientem*, ſed)

心 *ſin* *cor* (animus, ingenium, intelligentia)

通 *tum* *penetrat* (adſequitur)

萬 *van* }
物 *vē* } *omnium rerum*
之 *chi* }

情 *cîn* *cauſſas et proprietates*

若 *ſo* *ſicuti*

耳 *lh*
之 *chī* } *auris*
通 *tūm* *penetrat* (et percipit)
聲 *xīm*
也 *yè* } *vocum ſonos*

Non poſſum, quin hic ſubiiciam, quae R. P. Parrenin de huiusmodi argutiis ad me ſcripſit: *Nota*, huius-“ modi explicationes depromptas ex lexico eſſe arbitrarias,“ proptereaque variare ſcriptores, quia nullum habent fun-“ damentum ex prima inſtitutione: v. g. ſunt nonnulli,“ qui in ſcribendo, characterem *xim*, non ſupponunt lit-“ teram 壬 ſed 王 et poſtea ſic hariolantur, vel po-“ tius nugantur, dicentes, auris et oris rex, id eſt, ſa-“ piens qui ſcit audire et loqui.“

Decimus quartus codicillus vocatur 未卷 *kiven mŏ*, *liber extremus*: nam *mŏ finem* ſignificat. Primum in eo occurrit 似人 字辨 *pién sù*, *elucidatio characterum ſimilium inter ſe*. Sunt autem hae litterae eiusmodi, inter quas inſignis ſimilitudo intercedit, ſignificatione vel eadem, vel diuerſa. Dispoſitae ſunt in quinque ſectionibus. Prima inſcribitur 似相 字二

Ih çu siám sù, *duo characteres exteriori similitudine*, in qua ini characteres inter se comparati ad similitudinem exstant, diecta illustratione eorum minoribus litteris. Sic in ceteris, t in vltima quidem sex characteres inter se conferuntur. Nouum deinde caput 誤 明星 *sim ù*, eadem fere tractat. Pars vero tertia 圖直法韻 *yún ja chě tû*, *tonorum artis directa explanatio* inscribitur, cui pars quarta subiungitur 綠目法韻 *yún ja*, *tonicarum regularum*, *mò lu*, *index*, et quinta quae postrema 圖橫法韻 *yún ja hám tû*. In his agitur de doctrina accentuum, quam tanti non iudicauimus, vt operose exeuteremus. Vide interim, quae in Museo Sinico (8) de ea re diximus.

Sed non possum R. P. Parrenini de iisdem iudicium "reticere. (9) Accentus, inquit, adhibiti supra sonos Eu"ropaeos res prorsus est inutilis. Accentus enim Sinenses "non percipiuntur oculis, sed aure discuntur et vsu, suntque "quasi imperceptibiles in ore Sinorum, vti aduertere po"tuisti, quando audiuisti legatos loquentes Sinice. Magnus "*Ogegin* est natione Tartarus orientalis, sed natus Pekini, "valde eruditus in libris et lingua. Dicesne illum cantasse "aut sibilasse, vt Angli? si quis Europaeus loquendo Sinice "bene ordinet phrasin, id est, non illam inuertat, semper "intelligetur a Sinis etiamsi peccet contra accentus *pim*, "*xam*, *cu*, *ju*. Sed si transponat verba nullus capiet, non "enim erit loquela Sinica. DE

(8) T. I. p. 11. seq. (9) In epistola ad me Pekini 30. Iul. 1734 data.

DE

RVSSORVM PRIMA EXPEDITIONE CONSTANTINOPOLITANA,

T. S. B.

ILlustris res est, quam e monumentis tum Russicis tum Graecis exsequar, de Russorum Kiouiensium prima expeditione Constantinopolitana, sed maximis eadem inuoluta difficultatibus. Russi scriptores cum famam tenerent, nacti duces Graecos parum illis temporibus idoneos, sic fluctuant, vt subleuandi nobis videantur: Graeci autem nulla aetate magis ad rerum memoriam litteris prodendam caecutiuerunt, quam cum ista sunt gesta, itaque erunt nobis accuratissime expendendi. Primum in anno susceptae expeditionis dissentiunt inter se scriptores Rutheni. Chronographus, ita appello vnum eorum anonymorum, quos ab amico conuersos Latine mecum habeo, ad A. M. 6374. A. C. 851. *tempore Michaelis Bardaeque Russi ducentis Cymbis expeditionem Constantinopolitanam susceperunt, multasque praedas in littoribus egerunt: Michael autem et Patriarcha Photius, factis precibus in templo Blachernarum, vestem B. Mariae inde canticis comitati, oram eius mari immerserunt, quo facto magna tempestas oritur et tota Russorum classis periit.* Historiographus Ruthenus alter anonymus ad A. M. 6374. A. C. 866. a superioris anni Kal. Septembribus, Oscol-

dum et Dirum hanc expeditionem ſuscepiſſe auctor eſt, pulſosque miraculo illo Ruſſos, rediiſſe Kioviam. Ad eundem annum auctor Stepennaiae Knigae, poſtquam de Oſcoldo et Diro deque expeditione dixerat, *erant*, inquit, *eorum in exercitu Cumani, qui ad Pontum Euxinum habitabant: hi, cum in pacis conditionibus Michaeli Imp. baptismum condixiſſent ſeſe ſuſcepturos, poſt paullo retractarunt, miraculum poſcentes nouae religionis gratia: euangelio in ignem coniecto extractoque ſine aliqua noxa deformitatis Archiepiſcopus Cumanos baptizauit: petentibus deinde, vt litteris inſtruerentur, Michael Imp. Methodium et Conſtantinum Leonis Theſſalonicenſis filios miſit, qui cum permultos libros conuertiſſent Slauonice, Methodius Morauiae epſicopatum adiit, Conſtantinus monachatum induit et nomen Cyrilli.* Theodoſius Abbas Kiouienſis omnium hiſtoricorum vetuſtiſſimus, cuius Chronicon Regiomonte in Bibliotheca Regia inter libros Radziuiliani legati exſtat, a quo Petrus M. ἀπόγραφον fieri curauit, ad A. M. 6372. qui Kal. Septembribus A. C. 863. iniit fere ad verbum ex Symeone Logotheta: at cum ne ſic quidem ſine errore narrationem eſſe oportuit, non ſatis conſiderato Symeonis illo loco, turbat, et Imperatorem cum Photio Patriarcha Ruſſici tumultus cauſſa bis Conſtantinopolin intraſſe ſcribit, cum neque Photius illo tempore pedem extra vrbem extulit et Imperator vero, vrbe obſeſſa ſemel aegreque per ſtationes hoſtium in eam penetrauit.

Diſſenſio in annis ex eo orta eſt, quod, cum Symeon Logotheta (1) ſcribit, nono anno Michaelis Imp.

(1) P. 445.

Imp. et decimo eiusdem anno Russos Constantinopolitana expeditione defunctos esse, alii alia ratiocinia in illis annis explicandis sequentes, longissime inter se sententiis discederent. Michael Traulus ad imperium peruenit A. C. 842. xx. Ian. itaque annus nonus eiusdem A. C. 850. et decimus A. C. 851. xx. Ian. iniit. Hunc plane annum ratiocinio suo respexit Chronographus, quem supra protuli. At cum Symeon Magister hisce rebus admiscet et Bardam Caesarem et Photium Patriarcham, qui postea fuerunt, aliud tempus et res et auctor postulant. Existimare aliquis possit, foedum errorem hoc in testimonio versari, nisi si sciat, quam rationem annorum in Michaele Imp. sequatur Logotheta. Est autem perspicuum, si quis eum paullo attente legerit. Nam primum numerat annos XIV. quos cum Theodora matre exegerit solidos, tum X. annos quos solus et annum vnum mensesque quatuor, cum collegam habuit Basilium Macedonem. (2) Accuratior videtur Symeon Michaele Glyca, (3) qui praeter annos XIV. cum matre annos XI. solos Michaeli tribuit, tamquam si collegam habuerit nullum: tamen etiam Logotheta non satis cauit. Regnauit Michael annos in vniuersum XXV. menses quatuor, dies tres, ad summam quatuor. At hi quatuor menses collegio Basilii adscribendi non fuerunt a Symeone. Nam Basilius Macedo collega fuit ab A. C. 866. XXVI. Maii, die Pentecostes vsque ad A. C. 867. XXIII. Aprilis, quo die Michael Imp. occisus est. Vides totum fere mensem deesse anno solido, quo collegae fuere Michael et Basilius. Anni autem, quos solus rerum potitus est Michael, ineunt ab A. C. 856.

Tum

(2) Vide p. 248. (3) p. 291. 292.

Tum enim ſub aeſtatem Theodora mater aula eſt pulſa. Eam ob cauſſam Leo Grammaticus (4) et Georgius Codinus (5) annos XV. Michaeli et Theodorae tribuunt, quod partem magnam quinti et decimi anni cum filio imperauit mater. Cum autem alibi Logotheta ſcribit, (6) Theodoram aula pulſam XIII. anno, is quidem error eſt, at argumento nobis eſſe debet, Logothetam A. C. 856. cuius anni aeſtate Theodorae matris potentiam collapſam diximus, ſolidum tribuere Michaeli tamquam primum. Idcirco nonus deinceps erit A. C. 864. et decimus A. C. 865. quibus annis expeditio Ruſſorum inferenda eſt, quosue Hiſtoriographus Ruthenus et Stepennaiae Knigae auctor reſpexerunt Theodoſius Abbas paene attigit. Atque huic etiam tempori apti ſunt Bardas Caeſar et Photius Patriarcha. Nam Bardas ab A. C. 858. Caeſar fuit (7) ad A. C. 866. quo anno caeſus eſt poſt Paſcha. Photius Patriarcha fuit ab A. C. 858. natalibus Chriſti. (8) Hae rationes nos ſpatio annorum ſatis anguſto includunt, ex quo excedere non poſſumus.

Noſtrae opinioni aduerſari videtur Nicetas Paphlago in vita Ignatii Patriarchae, cui ſcriptori, vt coaeuo plus tribuere cupiam, quam ceteris omnibus, niſi ipſe ſeſe impediret. Eius teſtimonio A. C. 860. Ruſſi ad Terebinthum penetrarunt. Nam auctor eſt, Ignatium poſtquam a Barda Caeſare A. C. 858. circa Natalia Chriſti patriarchatu pulſus fuit, Terebinthum, ſuum in mona-

(4) p. 457. (5) In originibus Conſtantinopolitanis p. 77. (6) p. 435. (7) Logotheta p. 439. (8) Praeter Hiſtoricos Byzantios, Nicetas Paphlago in vita Ignatii Patriarchae ab Harduino in Conciliis editus.

naſterium, ſeſe recepiſſe, anno autem proximo, Auguſto menſe Mytilenen deportatum, poſt menſes ſex Februario Terebinthum redeundi veniam impetraſſe. Iſthic cum ageret, inquit Nicetas, Ruſſi inſulam Terebinthum inuaſerunt, nec multum temporis effluxit, cum Photius Patriarcha concilium habuit, cui interfuere Nicolai Pont. Romani legati, vt hoc ſaltem auctore Niceta Ioannes Harduinus id concilium A. C. 859. inſerere non potuerit, quando rerum ordo non patitur. Eo in concilio Ignatius Patriarcha damnatus eſt: ne quid grauius pateretur Terebintho ſeſe ſubduxit et in Propontidis inſulas fugit. Auguſto menſe eiusdem anni ſeu A.C. 860. teſte Niceta, ingens Conſtantinopoli terrae motus fuit, cuius terrore portenti perculſus Bardas Caeſar, Ignatium paſſus eſt ab fuga redire in Terebinthi inſulae monaſterium. Tum ſubiungit Nicetas, ἐνθὺς ἦν ὁ σεισμὸς ἔσχη καὶ Βούλγαροι δὲ τότε προνοίας θεοῦ θείᾳ καταπενθεῖς λιμῷ, ἅμα δὲ τοῖς δώροις τοῦ Αὐτοκράτορος θελχθέντες τὰ ὅπλα καταθέμενοι τῷ ἁγίῳ προσήνεσαν βαπτίσματι, *illico autem terrae motus deſiit et Bulgari tunc prouidentia diuina graui adflicti fame ſimul et muneribus Imperatoris deliniti, armis poſitis ad ſanctum baptiſmum venerunt.* In hoc poſtremo paullulum ſubſiſtam, vt in nota temporis. Leo Grammaticus (9) de fame item ſcripſit: quidquid eius ſit, malo tamen Nicetam edidiſſe peſtem, vtpote cum per ipſam naturam peſtis repente depelli poteſt aut intermittere, fames non poteſt niſi paullatim ſuccedente copia. Quare λοιμὸν repone in hoc Nicetae loco. E contrario Leoni ad ſenſum non prae-

(9) p. 462.

praebeo, cum auctor eſt Michaelem Imperatorem terra marique exercitum duxiſſe in Bulgariam, Bulgaros malo ſuo attritos pacem petiiſſe, principem gentis, (Goborem vt Symeon Logotheta (10) ſeu Bogorem vt Cedrenus habet) (1) a Patriarcha baptizatum et a Michaele Imperatore ſusceptum, nomen mutauiſſe. Nam Cedrenus, Ioannes Curopalata, Zonaras Nicetae Paphlagoni conſentiunt, Bulgaros ſponte ſua ad ſacra chriſtiana acceſſiſſe. Hoc ipſum confirmare videtur epiſtola Photii Patriarchae ad hunc Michaelem Bulgariae Principem. At vero hunc Michaelem a Patriarcha baptizatum fuiſſe, tantum abeſt, vt Photius adfirmet illa in epiſtola, vt e contrario ne viſum quidem ſibi Principem doleat, ſuam ſolummodo operam in eo conuertendo praedicet. Fuit igitur in Bulgaris eccleſiae aggregandis magna pars Photio Patriarchae, quae res occaſionem dedit aliis prodendi ab eodem Patriarcha ſancta myſteria ſuscepiſſe Michaelem Principem. Symeon Logotheta baptiſmum hunc ad quartum annum Michaelis Imperatoris refert, ſiue ad A. C. 859. Hiſtoriographus Ruthenus ad A. M. 6366. *Bulgari baptizati ſunt, ſeptimo anno Michaelis.* Haec non cohaerent. Annus ille mundi a Kal. Septembribus A. C. 857. ſecundum annum Michaelis continet, ſeptimus vero annus A. C. 862. Id ipſum in Graeco aliquo reperiſſe videtur Hiſtoriographus: nam nihil certi definiri poteſt. Quidquid eius rei ſit, cum Nicetas Ruſſorum expeditionem ante hunc annum ponit, vitio laborat. Non nego, Ignatium Patriarcham in Terebintho inſula fuiſſe, cum Ruſſi inſulas Propontidis deuaſtarent hoſtilem in modum, attamen cum Nicetas concedit,

(10) p. 440. (1) p. 540.

cedit, inde ab A.C.860. menſe Auguſto, Ignatium concedente Barda Caeſare ἀνέυθυνον καὶ ἄνεδον εἰς τὴν αὐτῶν μονὴν, *inquiſitioni exemtum et liberum in monaſterium ſuum* (2) Terebinthum dimiſſum eſſe, atque inde iam vsque ad Bardae Caeſaris mortem fuiſſe, nihil impedit, quin in Terebintho A. C. 864. et 865. fuerit, cum Ruſſi inſulam expilarunt, Nicetas autem per errorem in ſuperiorem aetatem reiecerit, quae tum geſta fuerunt. Nam ſi Nicetam conferas cum Ignatii Patriarchae de cauſſa ſua ad Nicolaum P. R. epiſtola, eum in temporum rationibus rebusque ipſis aberraſſe ſenties. Ignatio tamen potius ordinem rei geſtae narranti fidem adhibuerim, quam Nicetae Paphlagoni.

Tempore expeditionis Ruſſicae conſtituto, reuertor ad rei geſtae ordinem. Res illas narrant praeter Symeonem, tum Leo Grammaticus, tum Anonymus Theophanis Byzantii Continuator, tum Cedrenus, Ioannes Curopalata Sailizes, Zonaras. Perſequar teſtimonia, vbi ſcopuli obſiſtent, ſiſtam gradum et iuuabo comiter. Ruſſica claſſis ſecundo Danapri aduerſus Conſtantinopolin deuecta eſt, inde ab Kiouia, vt nos curſum illum e Conſtantino Porphyrogenneta (3) alibi explicabimus. Profecti ſunt igitur, iſto teſte, Iunio menſe. Sub exitu aeſtatis τὰ ἐνδὸς Εὐξεινου καὶ πᾶσαν αὐτῶν παραλίν τὸ ἔθνος ἐπόρθη καὶ κατέτρεχε, *omnem interiorem Pontum (ſeu littora Ponti) vaſtauit hic populus et excurſionibus depopulatus eſt*, vt Cedrenus ait. (4) Theophanis Continuator, (5) τόνδε Πόντον αὐτὸν, ὅ μὴν καὶ τὸν Εὔξεινον καλ-

(2) p. 971. (3) De adminiſtrando imperio p. 59. (4) p. 551. Zonaras T. II. p. 162. (5) p. 121.

εμπίμπρα ἢ αὐλὴν τὴν πόλιν περιεσόιχισεν *et ipsum Pontum non iam amplius Hospitalem gens ea vastauit et vrbem ipsam obsidione cinxit.* Cum Russi littora Pontica diriperent, eodem anno, Symeon Logotheta tradit, (6) Michaëlem Imp. contra *Agarenos* fuisse profectum, Leo Grammaticus (7) contra *Saracenos*. Sic enim diuersis nominibus hic populus a Graecis editur. Haec cum narrant auctores Graeci, scopulos videntur loqui et lapides. Nam Symeon Logotheta tradit Michaelem iam ad Mauropotamum fuisse, cum de aduentu Russicae classis perferretur, ita eum rediisse nulla re peracta. E contrario Leo Grammaticus: Ωορύφας ἐμήνυσε τὴν τῶν ἀθέων Ρῶς ἄφιξιν γενομένων ἤδη καὶὰ τὸν Μαῦρον πολαμὸν, *Oryphas ab CPli Imperatori nunciauit aduentum impiorum Rossorum, quod iam ad Mauropotamum essent.* Georgius Monachus (8) in eandem sententiam: Οορύφας οὔπω τῦ βασιλέως μηδὲν ἐξ ὧν ἐμελέτα καὶ καὶὰ νῦν εἶχεν εἰργασαμένυ, τὴν τῶν ἀθέων Ρὼς ἐμήνυσεν ἄφιξιν, γεγενημένυς ἤδη καὶὰ τόν Μαυροπόταμον. ἢ ὁ μὲν βασιλοὶς ἢ τῆς ἐχομένης μετεχέθη ὁδῦ, ἢ δὶ ἣν ταύτην ἀφῆκεν, ὑδὲν βασιλικὸν ἢ γενναῖον εἰργάσαλο, *Oryphas Imperatori, cum nihil ex iis quae animo conceperat, esset exsecutus, impiorum Rossorum aduentum nunciat: esse eos iam ad Mauropotamum: et Imperator a suscepto itinere reuertit, nihilque eorum, ob quae in iterat iter imperatorie atque fortiter peregit.* Ergo in diuersis sententiis considerandum nobis est, quae veritati magis conueniat. Μαυροπολαμὸς in codice Parisino Μέλας πολαμὸς, vt Ioannes Boiuinus ad Nicephoram

(6) l. c. (7) p. 463. (8) p 535.

ram Gregoram annotauit, qui Μέλανα quoque a Cantacuzeno dici adiecit. Vtrumque nomen *Nigrum fluuium* significat. Hic fluuius, vt ex Nicephoro Gregora (9) et Niceta Acominato (10) intelligo, ad occidentem Cherſoneſi Thracicae in Aegaeum mare exonerabatur. Erat etiam alius Μέλας πόλαμὸς in Pamphilia, qui item dici potuit Μαυροπόλαμὸς in Pamphylia tamen Imperator ad Mauropotamum eſſe non potuit, cum nuncius perferretur de Ruſſis, is enim fluuius fere ipſis in finibus imperii Romani fuit, quod contrarium eſt iis, qui tradunt haud ita longe ab vrbe abfuiſſe Imperatorem et celeriter aduolaſſe. Ergo Mauropotamus Thraciae tantummodo a nobis ſpectari debet. Qui Ruſſos ad Mauropotamum iam fuiſſe tradunt, cum ad Imperatorem nunciaretur, hi quidem quid dicerent, non ſatis penſi habuere. Neceſſe enim fuit, vt ipſam Conſtantinopolin praeteruecti et tot promontaria Thraciae, occidentem petierint, nulla quod appareat cauſſa et ratione. Et qui potuit Oryphas hoſtes cernere ad Byzantium, nec monere tamen Imperatorem, niſi cum curſu ſatis longo deuecti eſſent ad littora Thraciae occidentalia? Praeterea iidem ſcriptores a ſe diſſentientes tradunt, Ruſſos intra Ἱερὸν ſuiſſe, cum Imperator cognito nuncio reditum pararet. Quaſi Ruſſi ex mari Aegaeo aduenisſent et primum ſtationem habuiſſent ad Mauropotamum deinde Byzantium praeteruecti Ἱερὸν intraſſent, ita narrationem ſuam perſequuntur iſti ſcriptores, vt neque pes neque caput rei appareat. Quae cum cernerem, credidi initio, omnino expeditionem Roſſicam fuiſſe

(9) p. 254. (10) p. 43.

nullam, ſed Saracenos et piratas a Rhoſo vrbe Ciliciae cum claſſe profectos fuſosque ad Conſtantinopolin occaſionem eius expeditionis comminiſcendae, nominis conuenientia praebuiſſe. Auxit ſuſpicionem locus quidam ex Synopſi Georgii Monachi, quem poſtea producam. At cetera deinde inter ſe contendens, Leonem Grammaticum et Georgium Monachum corruptos eſſe ſenſi et ſcribendum vtroque loco eſſe γενομένῳ ἤδη καὶ τὸν Μαυρον ποταμὸν, vt ſit idem ſenſus qui in Symeone Logotheta, Imperatori, cum eſſet ad Mauropotamum, aduentum Roſſorum nunciatum fuiſſe.

Poſtquam hos ſcopulos ſuperaui, veritatem rei magis ſequar, quam auctorum meorum verba. Anno nono Michaelis autumno, Roſſi in Ponto res geſſerunt. Quibus cum Imperator ſibi videretur ſatis idoneam claſſem et Ponticas copias oppoſuiſſe, vt in ignoto hoſte incautior, anno poſt maiori cum claſſe aduerſus Saracenos profectus eſt, qui tum in Aegaeo mari potentes erant. Vrbi Imperator praeſidio reliquit Ωοχύφαν vt Leo, vt Symeon Οχύφαν. Is ipſe eſt, qui a Conſtantino Porphyrogenneta (1) et Continuatore Theophanis (2) ſub Baſilio Imperat. nomine Nicetas cognomento Οχύφας Patritius et Drungarius rei naualis fuiſſe dicitur. Eadem in dignitate ſub Michaele Imp. fuit, vt Nicetas Dauid Paphlago (3) et Symeon Logotheta (4) teſtantur, tum in Imperatorem tum in Baſilium collegam ſumma fide, quare etiam poſtea Baſilius Imper. eidem vrbem

(1) De A. F. p. 88. (2) In Baſilio p. 179. (3) In vita Ignatii p 963 (4) p. 453.

vrbem tradidit, quotiens in expeditionem exire ſolebat. Imperator ſua cum claſſe in mare Aegaeum deuectus ſtationem habebat ad Mauropotamum, vbi, illo ipſo Imperatore, Theoctiſtus Saracenos nauali praelio vicerat, teſte Georgio Monacho. (5) Igitur etiam tunc Saracenica claſſis exſpectata eſt, niſi ſi Imperator aliquam maiorem expeditionem in Creta, vt aliquanto tempore poſt, aut in aliis Saracenicis littoribus animo agitauit. De claſſe Agarenica, cui ſeſe obiecerit iuſtam cauſſam coniectandi habeo, quod Imperator audito Ruſſos adeſſe ad vrbem, claſſem ſuam non reduxit, ſed ſolus aduolauit ad repellendos vrbanis auxiliis hoſtes. Verum etiam tenuis belli Saracenici memoria exſtat in epitome ſeu argumentis Georgii Monachi, ex quibus apparet, nos Georgium hunc integrum non tenere. Sic enim hoc loco, vbi de bello Ruſſico: ὅτι εἰς τον καιρὸν Μιχαὴλ καὶ Θεοδώρας ἦλδον Αγαρινῶν πλοῖα, ὡς σὺ ἐν τῇ Κονσανλίνυ πόλει ᾗ χάριτι τῆς Θεομήτορος ἀπῆλθον ἄπρακτοι ᾗ διαφθαρμένοι, *tempore Michaelis et Theodorae* (de Theodora quidem error eſt,) *venerunt naues Agarenorum ducentae Conſtantinopolin et gratia Matris Dei receſſerunt nulla re geſta et clade accepta.* Ex ducentarum nauium et miraculi mentione colligo, Scholiaſtam Georgii res Saracenas et Ruſſicas eodem in loco ſeparatim a Georgio editas confudiſſe.

His cum Imperator ageret, Oryphas trepidos nuncios miſit, Ruſſos qui in Ponto res geſſerant Vrbem oppugnatum venire et in Hiero eſſe. Ιερὸς κόλπος ſinus

(5) In vita Ignatii p. 529.

ſinus Boſpori Thracici in Aſiae littoribus fuit, ex quo ſinu petebatur Pontus. Ex Ponto autem naues Cyaneas inſulas et Coracium promontorium Chelasque praeternectae hunc in ſinum ſeſe recipiebant. Dionyſius Byzantius: *poſt Chelas Hieron a Byzantiis quidem poſſeſſum, ſed commune receptaculum omnium nauigantium.* Anonymus auctor quem Arrianum quidam falſo ediderunt, in periplo Ponti Euxini, (6) oſtendit CXX. ſtadia inter Conſtantinopolin atque Hierum interfuiſſe: τοῦτο δὲ τὸ χωρίον ἀφηγήσιόν ἐστι τοῦ εἰς τὸν πόντον πλεόντων, *ab hoc ſinu ſoluunt, qui in Pontum nauigant*: Totidem ſtadia Polybius (7) Boſporo in longitudinem attribuit et in Ponti finibus τὸ Καλόμενον Ιερὸν collocat. Commodiſſime ſitum Hieri videbis in Petri Gyllii tabula Boſpori Thracici. (8) Ruſſi igitur ducentis lintribus Hierum ingreſſi, per commoditatem ſtationis excurſiones faciebant et multa cum ſtrage Chriſtianorum deſaeuiebant, vt Symeon Logotheta et Leo Grammaticus teſtantur. Sed haec curatius explicat Nicetas Dauid Paphlago in vita Ignatii Patriarchae, (9) cuius verba, cum ſcrupulus de tempore a Niceta iniectus, a nobis ſupra exemtus eſt, huc apponam:

Κατ' ἐκεῖνον γὰρ τὸν καιρὸν τὸ μιαφονώτατον τῶν Σκυθῶν ἔθνος οἱ λεγόμενοι Ρῶς, διὰ τοῦ Εὐξείνου πόντου προσκεχωρηκότες, τῷ Στε-

Ea tempeſtate Scytharum gens crudeliſſima, Roſſi dicti, ab Euxino Ponto digreſſi in Stenum et omnes regiones, omnia monaſteria praedis agen-

(6) p. 1. edit Hudſon. (7) p. 427. (8) Confer eundem Gyllium T. II. Imperii Orientalis Banduriani p. 321. (9) p. 964. ed. Hard.

νῷ, καὶ πάντα μὲν χωρία, πάντα δὲ μοναστήρια διηρπακότες ἤλθον καὶ τὸν τοῦ Βυζαντίου περιοικίδων κατέφορμον νησίων σκεύη, μὲν πάντα ληιζόμενοι καὶ χρήματα, ἄνθρώπους δὲ τοὺς ἁλόντας πάντας ἀποκλείνοντες. Πρὸς οἷς καὶ τῶν τοῦ Πατριάρχου μοναστηρίων βαρβαρικῷ καταδρομὴν καὶ θυμῷ, πᾶσαν μὲν τὴν εὑρεθεῖσαν κτῆσιν ἀφέλοντο, εἴκοσι δὲ καὶ δύο τῶν γνησιωτέρων αὐτοῦ κεκτημένους οἰκετῶν, ἑφ' ἑνὶ προχαντῆρι πλοίου τοὺς πάντας ἀξίναις κατεμέλισαν.

agendis peruagati, etiam per insulas circa Byzantium excurrerunt, supellectilem omnem depraedantes et argentum, homines autem, quos ceperant, necantes: praeterea Patriarchae monasteria barbariis furore et impetu incursantes, omni supellectili, quam inuenerant, direpta, viginti atque duos ex fidissimis eius captos vno in nauigii trochantere securibus percusserunt vniuersos.

Stenum dixit Nicetas more veteri Bosporum ipsum inter Pontum et CPlin: alioqui illis temporibus Στενὸν a Byzantiis vocabatur Europaeum Bospori littus. (10) Nam ita etiam Nicetas alibi (1) πρὸς τοῖς δεξιοῖς τοῦ Στενοῦ μέρεσι, *in dexterioribus regionibus Steni* seu in regionibus Asiaticis ad Bosporum. Erant in Bosporo insulae atque in his αἱ Πρινκίπειοι νῆσοι προσαγορευόμενοι, Πλάτη, Ὑαλρὸς, καὶ Τερέβινθος, *insulae Principes dictae, Plate, Hyatros et Terebinthus.* (2) Iis in insulis Ignatius Patriarcha, cum adhuc monachus

(10) Anselmus Bandurius in Constantinum de A. J. p. 134. (1) p. 947.
(2) Nicetas Paphlago p. 950.

eſſet, ex paternis facultatibus fratrum conſenſu monaſteria excitauerat, poſt paullo ante mortem e regione haruncce inſularum coenobium Michaelis in continenti aedificauit. Poſtquam a patriarchatu deiectus eſt, iuſſus eſt Terebinthum in coenobium ſuum concedere, hinc in exilium deportatus eſt Mitylenen: ab exilio reuocatus Terebinthi tum maxime agebat, cum Roſſi excurſiones ſuas facerent in Steno. Laeta res in vibe fuit, tum Nicetae Oryphae drungario, tum aliis, qui Photio ſtudebant, cum Ignatii poſſeſſiones ferri agique nunciarentur: ipſum Roſſorum manus euaſiſſe, dolori fuit. Ignatius autem, vt ait Nicetas Paphlago, εὐχαριστῶν ἢ ταῖς προσευχαῖς ἀδιαλείπτως πρὸς τὸν Θεὸν ἀναλειπόμενος, τὴν παρ' αὐτῆ κρίσιν ἢ βοήθειαν ἐπεκαλεῖτο, μαλάιαν δὲ πᾶσαν τὴν ἀπό τῶν κραταιῶν ὁκούτνων ἡγεῖτο σωτηρίαν, *Deo gratias agens et orationibus aſſidue intentus, a Deo iudicium et auxilium exſpectabat, vanam omnem ab his, qui multum poſſe videbantur, ſalutem iudicabat.* Neque tantummodo poſſeſſiones Ignatii peſſumdabantur, ſed familiares quoque eius et domeſtici, quotquot in manus hoſtium venerunt, male mulctati ſunt et ſecuri percuſſi ἐφ' ἑνὶ τροχαντῆρι πλέιω. Eſt autem τροχαντὴρ in homine quidem oſſium circa femoris caput prominentia, in naue alterutrum latus in proram aut puppim exſurgens. Erat Terebinthi μέσον πλατείας τῆς νήσου ναὸς τοῖς τεσσαράκοντα μάρτυσιν, αὐτῆ δὲ ἐχόμενα τῆς Θεομήτορος εὐκτήριον, τότε τὴν τράπεζαν οἱ Ρῶς, τὴν νῆσον πορθοῦντες, καλέβαλον εἰς γῆν, Ιγνάτιος δὲ τάυτην αὖθις ἀνεθρόνισεν, *in medio latitudinis inſulae aedes quadraginta martyrum et adiunctum aedi oratorium Matris Dei: huius aedis aram, Roſſi, inſulam vaſtantes in terram*

eam disiecerunt, Ignatius vero eam restituit, vt ait Nicetas Paphlago. (3) Inde Photius Patriarcha Ignatio molestiam creauit, quod sacerdotio exutus, aram dedicare esset ausus.

Haud multum temporis populationibus Hieri Stenique impensum est: inde Rossi Byzantium deuecti vrbem ducentis nauibus incluserunt. Symeon Logotheta (4) περικυκλῶσιν τὴν πόλιν, vbi Combefisius improuide *vrbem vallo cingunt.* Nam ab his ducentis lintribus tantummodo mari vrbs clausa est, inde a Propontide vsque ad Chrysoceras e regione Blachernarum. Maximus vrbi terror fuit, cum non appareret, quemadmodum Imperator posset intrare: tamen ille solus per stationes natium hostilium in vrbem euasit. Cum exercitus in propinquo non esset, neque multum auxilii in vrbana multitudine exstaret, Imperator perfugium ad diuinam opem recepit. Continuator Theophanis auctor est, Rossos Φωτίου τὸ θεῖον ἐξιλεωσαμένου θείας ἐμφορηθέντας ὀργῆς, *Photio Patriarcha Deum exorante, diuina multatos vindicta*, domum rediisse. At Leo Grammaticus prolixe narrat, Imperatorem cum Patriarcha templum S. Virginis in Blachernis adiisse, Dei pacem imploraſe, et producto μαφορίῳ cum hymnis processisse ad mare. Erat autem *mafortium*, vt Latini corrupta voce dicebant, ὠμαφόριον et μαφόριον, tela, qua caput tegebatur, dependens ad humeros: ea ipsa, qua Calogeri, Graeci atque Russi vtuntur, qua olim mulieres sunt vsae, nunc etiam moniales. (5) Constitutio de monialibus in

(3) p. 975. (4) Continuator Theophanis p. 121 et alii 55. Vid Claudius Salmasius ad Vopiscum p 541

codice Coisliniano: (6) *vt communio detur monialibus* τὰς ὄψεις τοῖς μαφορίοις κεκαλυμμένας, *vultus contectis suo quibusque majorio.* Maforium S. Virginis Leone Macedone imperante CPlin delatum eſt, cuius rei memoria in Menologio Baſiliano Julii II. celebratur. Nulla iſthic effigies extat in Vrbinatenſi editione, quod pars ea in elegantiſſimo Baſilii Imp. codice temporum iniuria periit. At aliis in picturis eiusdem Menologii ſpectari poteſt monachorum et mulierum ſanctarum maforium, vt S. Theodoſii Coenobiarchae, S. Euthymii Presbyteri, S. Paphnutii S. Melaniae Romanae, S. Domnicae, S. Euphroſynes. Duo fratres Patricii Galbius et Candidus, cum Hieroſolyma peterent, in aedibus cuiusdam anus Ebraeae veſtem iſtam S. Virginis depoſitam reperere multosque aegrotos domum illam frequentare ſanitatis cauſſa. Igitur illi arcam huic ſimilem, in qua erat veſtis, ſuppoſuere, at hanc veram arcam ſubreptam furto deportarunt CPlin et in Blachernis dedicarunt. Saepe illa veſte vſi ſunt Imperatores Graeci maximis in diſcriminibus rerum: vt Romanus Lacapenus in Bulgarico tumultu. (7) Eam igitur veſtem Photius Patriarcha ἄκρως, vt Symeon Magiſter ait, vt Leo Grammaticus, ἄκρῳ τῇ θαλάσσῃ προσέβαλε, non totam veſtem, ſed extremitatem eius mari intinxit. Res mira, vt iſti quidem narrant: erat ſumma coeli marisque tranquillitas, cum repente turbo ortus naues Ruſſorum adflixit: fractae pleraeque, paucae periculum euaſerunt. Cedrenus, ne quid dicam de Ioanne Curopalata Scylitze, qui Cedrenum

(6) In Bernardi Montfauconii Bibliotheca Coisliniana p. 110. (7) Incertus auctor in vita Romani p. 252.

num descripsit in commentarios suos, tum Zonaras, homines religione tacti, tantum iram numinis et prouidentiam defendendae vrbis Russos sensisse scribunt, nullo miraculi testimonio. Consentiunt tamen cum Incerto Continuatore Theophanis, Rossos non multo post in vrbem misisse legatos, qui baptismum flagitarint et impetrarint.

Atque hunc in modum ipse Photius Patriarcha in epistola encyclica ad Patriarchas orientis Rossorum expeditionem sine miraculi memoria attingit et conuersionem mirifice praedicat. Epistolam e codice Bibliothecae Vallicellanae apud Romam atque ex alio codice Collegii Graecorum Federicus Metius Latine conuertit, Cardinalis Baronius ad A. C. 863. in Annalibus recensuit, Richardus Montacutius Norwicensis Episcopus inter ceteras Photianas epistolas dedit etiam Graece. Non possum praetermittere, quod a Leone Allatio obseruatum est in consensu orientalis et occidentalis ecclesiae: (8) apponam Allatii verba: *Sisinnius Photii epistolam encyclicam, quam in Latinos ille temeritatis ac audaciae plenam exercuerat titulo tantummodo immutato et suo nomine suppositio ad reliquos Patriarchas ipsissimis verbis transmisit, homo nequissimus, licet multa in ea continentur, quae ad Photium et Photiana tempora pertineant, quae ipse non immutauerat: adeo importune iste, verborum magistri obseruator religiosus ineptit: nisi etiam dicamus, nomen Sisinnii ab aliis illi epistolae appositum fuisse.* De Sisinnii Patriarchae nomine suppositio, etiam Baronius Cardinalis ostendit sibi

(8) p. 606.

in mentem veniſſe. Quae autem Allatius tanta cum bile dicat Photianis temporibus magis concordare, quam Siſinnii Patriarchae, equidem non video. Nam quae Photius de Latinorum epiſcoporum ad orientales eccleſias epiſtola encyclica habet, ea, teſte Baronio, in Siſinnii epiſtola ſunt praetermiſſa, et haec vero ſola tantummodo ad iſtam Photii cauſſam pertinent. Si forte res Bulgaricas Leo reſpexit, quae eadem in epiſtola attinguntur, illae vero ad Photium vel maxime pertinuerunt, tamen iisdem verbis Siſinnius Patriarcha etiam poſt Photium de Latinorum ambitione conqueri iure ſuo potuit. De epiſtola ſatis, rem ipſam videamus. Poſtquam de Bulgaris, dixerat Photius, qui Chriſto nomen dederant, ita fatus eſt: (9).

Καὶ γὰρ ὁ μόνον τὸ ἔθνος τοῦτο, τὴν εἰς Χριστὸν πίστιν τῆς πρόσθεν ἀσεβείας ἠλλάξατο, ἀλλάγε δὴ καὶ τὸ παρὰ πολλοῖς πολλάκις θρυλλούμενον καὶ εἰς ὠμότητα καὶ μιαιφονίαν πάντας ἀνθρώπους ὑπερβαλλόμενον τοῦτο δὴ τὸ καλούμενον τὸ Ῥῶς, οἱ δὴ καὶ τῆς Ρωμαικῆς ἀρχῆς τοὺς πέριξ αὐτῶν δουλωσάμενοι κακεῖθεν ὑπέρογκα φρονηματισθέντες χεῖρας ἀντῆραν. ἀλλ' ὅμως νῦν καὶ ἔστοι

At non ſolum gens iſta fidem in Chriſtum cum priſtina impietate commutauit, verum etiam populus apud multos ſaepe ſermonibus et fama celebratus et tum ob crudelitatem tum ob ſanguinis humani ſitim omnes alios populos poſt ſe relinquens, Roſſi, inquam, qui poſtquam vicinas in circuitu gentes ſub iugum miſerunt, atque ob eam cauſſam ſuperbia elati magnifice de ſe ſentientes contra Romanum imperium manus

(9) p. 58

τὴν τῶν Χρισιανῶν καθαρὰν καὶ ἀκίβδηλον θρησκείαν τῆς Ἑλληνικῆς καὶ ἀθέου δόξης, ἐν ᾗ κατείχοντο πρόσερον, ἀν τηλλάξαντο, ἐν ὑπηκόων ἀυλῶς καὶ προξένων τάξει ἀντὶ τῆς πρὸ μικροῦ καθ' ἡμῶν λεηλασίας, καὶ τοῦ μεγάλου τολμήματος ἀγαπητῶς ἐγκαλασχύναντες. Καὶ ἐπὶ τοσοῦτον ἀυλῶς ὁ τῆς πίσεως πόθος καὶ ζῆλος ἀνέφλεξεν, (Παῦλος πάλιν βοᾷ, εὐλογητὸς ὁ Θεὸς εἰς τοὺς αἰῶνας) ὥσε καὶ ἐπίσκοπον καὶ ποιμένα δέξασθαι, καὶ τὰ τῶν Χρισιανῶν θρησκεύματα διὰ πολλῆς σπουδῆς καὶ ἐπιμελείας ἀσπάζεσθαι. Τούτων δὴ οὕτω τῆ τοῦ φιλανθρώπου Θεοῦ χάριτι, τοῦ πάντας ἀνθρώπους θέλοντος σωθῆναι καὶ εἰς ἐπίγνωσιν ἀληθείας ἐλθεῖν, τῶν παλαιῶν αὐλοῖς δοξασμάτων μετατιθεμένων καὶ τὴν εἰλικρινῆ των Χρισιανῶν πίσιν ἑκάνων ἀλλασσομένων εἰ διανασάη καὶ ἡ ὑμετέρα ἀδελφότης συμπροθυμηθῆναι καὶ συνκατεργάσασθαι εἰς τὴν ἔκβασιν καὶ κατάσασιν τῶν παρα-

manus ſuſtulerunt, nunc tamen et ipſi Chriſtianorum puram et incorruptam religionem cum pagana et impia ſuperſtitione, qua antea tenebantur, commutarunt, atque veluti obſequentes amicosque ſeſe gerunt, cum paulo ante nos latrociniis ſuis exagitarunt magnumque facinus aggreſſi ſunt. Et adeo eos fidei deſiderium amorque incendit, (Paulus hic iterum exclamat: benedictus ſit Deus in ſecula) vt etiam et epiſcopum et paſtorem ſuſceperint, cultusque Chriſtianos multis ſtudiis et magna cura complectantur. Hi cum eum in modum gratia miſericordis Dei, qui omnes homines ſeruari vult et ad cognitionem veritatis peruenire, priſcos ſuos errores depoſuerint et eorum in locum ſinceram Chriſtianorum fidem ſuſceperint, ſi veſtra fraternitas ſimul ſeſe excitet ad rem communi ſtudio iuuandam excindendosque et exurendos ſtoloones, in domino Ieſu Chriſto vero Deo noſtro confidimus fore,

Φυάδων ἐν Κυρίῳ Ιησοῦ Χρι- re, vt grex eius longe adhuc
στῷ τῷ ἀληθινῷ Θεῷ ἡμῶν magis creſcat et vt impe-
πεποιθότες ἐσμὲν, ὅπι τὸ πρὸι- tur, quod dictum eſt, cogno-
μνιον αὐτοῦ, ἐπὶ πλέον ἔτι ſcent me omnes inde a paruo
μᾶλλον αὐξηθήσεται ἢ πλη- ad magnum.
ρωθήσεται το εἰρημένον, ὅτι
Εἰδήσουσί με πάντες ἀπὸ μι-
κροῦ ἕως μεγάλου αὐτῶν.

Nouam adieci verſionem, quod neque Metianam probare me poſſe ſenſi, neque Montacutianam. Ipſo in ingreſſu offenderunt: Metius, vt ſenſus ſit obſcurus, Montacutius, vt ſit nullus. De iſto quidem non opus eſt vt dicam: hic cum in MS. Bodleiano eſſet ſcriptum τορῶς, varie ſeſe torſit et in margine quidem τὸ Ρὼς ex coniectura quam veriſſime appoſuit, ipſa autem in interpretatione: *ſed inſuper quod multorum vocibus decantatur, cum poſt ſe omnes, quod crudelitatem attinet et ſanguinis fundendi cupiditatem, in ſecundis reliquerint et illud, quod vocatur Rhos, apud eos ita obtinuerit, vt Romani imperii ſubditos quaquauerſum proximos in ſeruitutem redigerent.* Nimirum, vt ex ſubiecta nota apparet, Montacutius non ſenſit, de Ruſſis hoc loco dici atque iſthuc Ρως explicuit de claſſico Bulgarorum. Subiecit quidem aliquid etiam ex Ioanne Curopalata de Roſſis, ſed vt nihil vsquam toto in ſermone eius cohaereat. Cum Metius iſta τὰς πέριξ αὐτῶν δουλωσάμενοι interpretatus eſt, *infinitos populos ſibi ſubiecerunt*, id nimis large et inconſulte factum eſt. Quo anno Photius epiſtolam ſcripſerit, ex Guntheri et Theutgadi epiſcoporum mentione intelli-

intelligere mihi videor. Non ſane ante A. C. 863. ad Photium Patriarcham querelas de Pontificis Romani iniuriis deferre illi potuerunt: eo enim anno ille a cathedra Colonienſi, hic a Treuirenſi deiecti ſunt. Teſtes habeo Annales Fuldenſes et Sigebertum Gemblacenſem. Itaque Baronio adſenſum praebere non poſſum, cum illo ipſo anno epiſtolam Photii ſcriptam fuiſſe contendit. Immo ſcripta eſt A. C. 866. Nam, cum Michael Imperator Baſilium collegam ſalutaſſet, hoc eſt A.C.866. teſte Niceta Paphlagone,(10) Photius Patriarcha Michaeli Imp. perſuaſit, vt Synodus cogeretur, quae in Pontificem Rom. pronuntiaret ſententiam. Ceterum etiam Nicetas quaſi digito nobis demonſtrat Guntherum et Theutgaudum epiſcopos, cum ſic ait: αὐτὸς δὲ τῆς ἐμφύτου κατὰ τοῦ ἁγίου μηνίδος εἶχετο καὶ τῶν γνησίων αὐτοῦ θεραπευτῶν, μᾶλλον δὲ νόθων, ὅσοις ἠδύνατο, κλέπτων καὶ ταῖς παλαιότησι τῶν ἀξιωμάτων δελεάζων, δι' αὐτῶν τὴν πλέρναν τοῦ ἀνατίου ἐπετήρει. *Ipſe autem* (Photius) *inſito odio in ſanctum* (Nicolaum P. R.) *ferebatur et Germanos eius ſectatores* (epiſcopos occidentales) *immo potius ſpurios* (quia contra P. R. nitebantur) *quotquot poterat, furtim ad ſe trahebat, per quos innocentis calcaneo inſidiabatur.* Acta ſynodi non modo ad Ludouicum Pium Imp. atque Ingelbertam miſſa ſunt, ſed etiam per Zachariam Cophum Chalcedonenſem Archiepiſcopum in Italiam. Quamobrem Annales Fuldenſes ad A. C. 868. *Nicolaus Pontifex Epiſcopis Germaniae duas deſtinauit epiſtolas, vnam de factionibus Graecorum, alteram de Theutgaudi et Guntharii Epiſcoporum depoſitione, in qua refert*

(10) p. 981.

eos ſeptem capitalia crimina commiſiſſe: in Synodo Epiſcopi nonnulla capitula de vtilitate eccleſiaſtica conſcribentes, Graecorum ineptiis congrua ediderunt reſponſa. Iſta ſub Maium menſem recitata ſunt Vormatiae praeſente Ludouico Imp. Vides duas cauſſas, vt erant in Photii epiſtola, a Nicolao coniungi. Et exſtant Nicolai P. R. epiſtolae, altera, qua criminationibus Photii reſpondet x. Kal. Decembris, altera de Theutgualdi et Guntharii cauſſa pridie Kal. Nouembris, vtraque Indictione prima. (1) Ex Indictione vides ſcriptas eſſe A. C. 868. et demum A. C. 869. Vormatiae eſſe recitatas. In altera Nicolaus Photium diſertis verbis inceſſens: *illa nos commouere videntur, quae nobis, immo vniuerſae occiduae parti a Graecorum Imperatoribus Michaele ſcilicet et Baſilio et ab his qui ſibi parent, nequiter ingeruntur.* Tum vero recenſet illa ipſa capita, quae in Photii encyclica exſtant, quae tum etiam Ratramnus Corbeienſis monachus aggreſſus eſt libro, qui a Dacherio eſt editus, (2) cuius hoc eſt principium: *Oppoſita quibus Michael et Baſilius Imperatores Romanam eccleſiam infamare conantur, vel falſa, vel haeretica, vel ſuperſtitioſa fore cognoſcuntur.* Hic ordo eſt rerum per encyclicam Photii motarum, qui nos plane aduerſus Baronii ſententiam confirmat. Si igitur A. C. 866. ſcripta eſt epiſtola, dicat quispiam, quid de Bulgaris fiet, quorum in ea facta eſt mentio? Vix duos annos in eccleſia perſeueraſſe ſcribit Photius, inde iam ad Latinos tranſiiſſe: eosdem vero

(1) In Concil Hard T. V. p. 286. 307. et in Nicolai P R epiſtolis.
(2) Dacherii Spicilegium Scriptr T I. p. 63. edit. poſtremae. Confer Nicolai P. R. epiſtolam ad Hincmarum de cauſſis odii Graecorum p. 309. ed. Hard.

ro ſupra demonſtrauimus A. C. 859. a Photio fuiſſe conuerſos. Regino Prumienſis, Eggehardus Vragienſis, Annales Francorum Fuldenſes A. C. 867. tradunt Ludouicum Pium Imp. Bulgaris petentibus Archiepiſcopum cum aliis Epiſcopis et Presbyteris dediſſe, *ſed Romani*, inquiunt, *Epiſcopi iam tum totam terram illam baptizando et praedicando repleuerant*. Quare nihil obſtat, quin A. C. 861. ad Romanam eccleſiam Bulgari ſeſe aggregarint. Neque vero hoc Baronii ſententiae ſuffragatur, neque noſtram vlla parte conuellit: iisdem enim verbis Photius A. C. 866. de Bulgaris ſcribere potuit, at de bello Roſſico A. C. 863. non potuit, quod A. C. 865. geſtum eſſe demonſtrauimus.

Hanc Roſſicam expeditionem recenti memoria celebrat Photius. Id vero nobis percommode accidit, qui A. C. 866. poſt XXVI. Maii cum Baſilius collega factus eſt, epiſtolam ſtatuimus ſcriptam. Sequitur deinde Epiſcopum a Photio Ruſſis eſſe miſſum A. C. 865. illico poſt cladem Ruſſorum. Neque hanc partem epiſtolae vel verbo refellit Epiſcopus Romanus, cum eum quae in Ruſſia fierent, fugere non potuere, Bulgaris frequenter Romam et in Germaniam commeantibus. Quantum ille Photio inſultaſſet, vt erat acer, ſi ea in re aduerſam tantae gloriationi eius famam tenuiſſet. Tamen auctor Knigae Stepennaiae negare videtur, Roſſos eo tempore eccleſiae fuiſſe aggregatos, et eorum in locum Cumanos ſubſtituit, neſcio quos: multa quoque permiſcet non admodum conſentanea veris. Nihil Photius de miraculo euangelii in ignem coniecti, nihil idem de

Archiepiſcopo, qui mitti non potuit, niſi vbi adeſſent Epiſcopi inferiori gradu. Epiſcopum a Photio miſſum eſſe Roſſis quibusdam petentibus, et ποιμένα ſeu Presbyterum non nego, habeo enim auctorem ipſum Photium. Et cum Roſſi omnia tribuunt Photio Patriarchae, vt baptiſmum Olgae, vt alia, quae Photii aetati non conueniunt, ſequitur, hanc eius magnam in eccleſia Ruthenica auctoritatem ab nulla alia ſtirpe repeti, quam quod primus eorum Epiſcopus Photianarum partium fuerit, non Ignatianarum. Et quamquam fuit iſthuc tempus, cum de Photio acerbius ſtatueretur, tamen paullatim iſtis factionibus exſtinctis, et Ignatii et Photii memoria in honore fuit, vt apparet ex epiſtola Synodi Nicaenae ad Alexandrinam eccleſiam. (3) Miraculum vero iſthuc ad Baſilii Imp. initia a Graecis refertur, cum iam Ignatius eſſet reſtitutus, Photio puſſo. Habemus teſtem Conſtantinum Imp. qui res Leonis patris et Baſilii aui congeſtas anonymo illi Theophanis Continuatori deſcribendas tradidit. Is ita memoriae prodidit: (4) miſiſſe Baſilium Imp. ad Ruſſos aurum, argentum et ſericas veſtes magna copia, foedusque pepigiſſe perſuaſiſſeque vt Archiepiſcopum ab Ignatio Patriarcha reciperent: Archiepiſcopum eo veniſſe, ἢ ἄρχοντα τῆς γένους conuocaſſe ſenatores et proceres in concilium praeſidentemque quaeſiuiſſe ex Archiepiſcopo, quam doctrinam adferret: hunc oſtendiſſe euangelium et miracula Ieſu Chriſti explicaſſe: at omnes in concilio poſtulaſſe, vt librum coniiceret in ignem: id vbi Dei pacem et opem implorans fecit, igne in cineribus ſubſidente illaeſum

(3) In Montfauconii Bibliotheca Coislinïana p. 99. (4) p. 211.

laesum librum repertum super saxilla: ergo omnes Russos baptismum recepisse. Sic Cedrenus, (5) Zonaras, (6) vterque ex isto anonymo, at ex alio auctore Michael Glycas. (7) Zonarae Synopsis, (8) ὅπως τὸ ἔθνος τῶς Ρῶς εἰς ἐπίγνωσιν ἦλθε Χριστοῦ. Fragmentum Graecum anonymi e MS. Colbertino ab Anshelmo Bandurio editum (9) hanc famam confirmat. Cum ἀκέφαλον est, multa nos fortassis ignorare oportet: nam inde demum narratio incipit, venisse Romam quatuor legatos, insignes viros, qui, quae ad religionem pertinebant, accurate perdiscerent: consideratis omnibus et Pontifice Romano consulto rediisse, quaeque viderant retulisse πρὸς τὸν μέγαν Ρῆγα, *ad magnum Regem.* Interim τὰς σὺν ἐκείνῳ ἀρχοντας, maxime eos, qui suscipiendae Christianae religionis fuerant auctores, suasisse, vt etiam CPlin legati mitterentur. Veniunt legati in vrbem, (τῷ τότε Ρωμαίων σκήπτρα ἰθύνοντι, Βασιλείῳ Φημὶ, τῷ ἐκ Μακεδονίας προσέρχονται) ad Imperatorem Basilium Macedonem atque inde omnibus exploratis apud τὸν λαμπρότατον καὶ μέγαν ῥήγαν *serenissimum et magnum Regem* CPlitanum ecclesiam mirifice extollunt. Ergo rex legatos iterum misit, qui episcopos peterent. Basilius Imp. misit ἀρχιερέα pietate et virtute clarum, et cum eo duos Κύριλλον καὶ Ἀθανάσιον εὐαρέτους καὶ αὐλοὺς ὄντας καὶ πάνυ λογιωτάτους καὶ φιλομαθεστάτους, *Cyrillum et Athanasium, honestos viros, et tam in Sacra Scriptura exercitatos, quam in humanitatis studiis.* Tum vero de miraculo addit auctor, vt supra ex Continuatore Theophanis

(5) p. 589. (6) p. 173. Tom. II. (7) p. 298. (8) Imperii Orientalis T. II. in Animadversionibus ad Constantinum de A. I. p. 113.

Byzantii commemorauimus. Ergo de Cumanis nihil eſt. Nam hi Ruſſi religionem receperunt, ad quos magna munera atque legatos de induciis proferendis miſit Baſilius Imp. Qui alii quam Kiouienſes, quorum arma CPlitani ſub Michaele ſenſerant? Ceterum in hoc fragmento nihil abſurdi eſt. Neque repugno de legatis Romam miſſis: ſunt enim his ſimilia, quae de legatis Bulgaricis ad ſe miſſis Nicolaus P. R. narrat. Cum autem Bulgari Romanae eccleſiae adiuncti incredibili Graecorum odio flagrarent, mihi admodum fit veroſimile; auctores eos fuiſſe Ruſſis, vt Romanae eccleſiae ſeſe potius aggregarent, quam Byzantiae: contra ea principes quosdam, qui a Photio epiſcopum receperant, pro CPlitana eccleſia tetendiſſe. Archiepiſcopus miſſus videtur, quod iam plures eſſent collectae eccleſiae et vt epiſcopum a Photio ordinatum vel dignitate opprimeret. Notae ſunt illorum temporum turbae de epiſcopis a Photio ordinatis, quos Ignatius Patriarcha ſumma vi loco atque gradu pellebat. Ceterum cum Ignatius A. C. 877. XXIII. Octobris fato functus eſt, ante eum annum haec accidiſſe apparet, et quantum ex illis auctoribus, qui exſtant, colligere poſſumus, ſunt enim admodum infantes, paullo poſt auſpicia Baſilii Imperatoris. Qui Olgam reginam primum, deinde Vladimirum regem chriſtianam religionem ſuſcepiſſe auctores ſunt, vera dicunt, neque cum his pugnantia: nam primi illi ex hac domo receperunt. Cum Oſcoldus iam eſſet initiatus, ab Olego Ingoris duce pagano in ordinem redactus eſt. Inde profanitas victrix fuit, donec in aulam regnantis domus admiſſa eſt religio. Ne cui autem mirum

rum videatur, fuiſſe CPli Slauonicarum linguarum gnaros, qui Ruſſos inſtituere potuerint, a multis temporibus Slauos in vrbe militaſſe recordemur et in rei publicae muneribus verſatos eſſe. Ceterum in Ruſſicis monumentis exſtat memoria templi S. Eliae quod Kiouiae fuit temporibus Ingoris regis, nullo alio magis tempore conditum, quam hoc, quod illuſtramus. Cum autem Photius de Ruſſis ſic ait: *vicinos in circuitu populos ſub iugum miſiſſe et propterea animis fuiſſe elatos*, ea primum quidem vetuſtioris nominis Roſſici, quam vulgo ab omnibus ſcriptoribus proditur, et quidem Kiouienſibus tributi teſtificatio eſt, tum rerum magnarum quae a Kiouienſibus ante Michaelem Imp. geſtae ſunt, illuſtris memoria. Populos autem puto dici Criuizos, Lenzininos, alios ad Pripelium, quos Oſcoldus deuicerit. Cum Graeci Scriptores tantummodo vnum vel regem vel principem edunt, qui illis temporibus Kiouiam tenuerit, Rutheni autem duos nominant, Oſcoldum et Dirum, alio loco demonſtrabo. Graecos vera tradidiſſe, Ruthenos nomen dignitatis *Diar* Oſcoldo tributum, voce obſoleta offenſos, pro principis alterius nomine perperam edidiſſe.

OBSER-

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE IN RVSSIA INSTITVTAE.

OBSERVATIONES
ASTRONOMICAE
IN RUSSIA
INSTITUTAE

ECLIPSES SATELLITVM IOVIS,
OBSERVATAE IN IMPERIALI SPECVLA ASTRONOMICA, QVAE PETROPOLI EST,

Per integrum annum 1738.

REFERENTE

Joſ. Nic. De L'Isle.

OBſeruationes quae hic recenſentur, vti annis praecedentibus factum eſt, ſaepius a diuerſis obſeruatoribus, variisque tubis inſtitutae ſunt. Quod ad me attinet, tubum optimum Catadioptricum 5. pedum, ex Anglia mihi comparatum, ſemper adhibui. D. Heinſius autem, qui iam ab anno praecedente hisce obſeruationibus incumbere coepit, conſuetis meis tubis vſus eſt; nunc praeſtantiſſimo Campaniano 15. pedum tubo, nunc altero 23. pedum. Tertius vero obſeruator et in iſtis obſeruationibus iam a me ſufficienter exercitatus, nunc iſto nunc illo ex iisdem tubis vſus eſt. Quandoque etiam, quamuis raro, vel ille, vel D. Heinſius, tubum Newtonianum 7. pedum, qui inter Academiae inſtrumenta numeratur, adhibuerunt. Tempus autem verum, ex motu 3 vel 4. horologiorum, quae optime inter ſe concordabant, fere ſemper deductum fuit.

1738. n. ſt.	Tempus verum h.	′	″	
Ianuar. 3	4	25	32	Emerſio primi, tubo Catad. 5. pedum.
		25	47	eadem, tubo 23. pedum. Coelum ſerenum.
Febr. 2.	6	34	40	Primus iam emerſerat. Prima emerſio ſub nube; ſed ſtatim atque Iupiter ex nube reſtitutus fuit, tam debili luce apparebat ſatelles, vt primam emerſionem 20. min. ſec. citius vix accidiſſe credendum ſit, tubo Campaniano 15. pedum.
Iulii 18.	13	23	55	Immerſio primi, tubo Campaniano 15 pedum.
		23	57	Adhuc apparebat idem ſatelles, tubo 23. pedum.
		24	0	Diſparuit, tubo Catad. 5. pedum.
		24	3	Nec amplius apparebat, tubo 23. pedum: coelo ſereno et quieto, ſed crepuſculo nimis ingraueſcente.
24.	12	50	5	Emerſio tertii, tubo Catad. 5. pedum: coelum ſudum.
30.	13	15	53	Immerſio ſecundi, tubo Campaniano 15. pedum.
		15	55	eadem, tubo Catad. 5. pedum.
		16	7	- - tubo reflectente 7. pedum.
31.	14	33	39	Immerſio totalis tertii, tubo Campaniano 15. pedum.

eadem

1738. n. ſt.	Tempus verum. h.	′	″	
		34	1	eadem, tubis Anglicanis 5. et 7. pedum: coelum quidem ſerenum et quietum, ſed crepuſculum iam nimis forte ingruebat.
Aug. 3.	11	39	28	Immerſio primi, tubo Camp. 15. pedum.
		39	38	eadem circiter, tubo 23. pedum.
		39	57	- - tubo Newtoniano 5. pedum.
		39	59	- - tubo Catad. 7. pedum: Nebula quae Iouem circumdabat, aliquantum nocuit.
19	9	58	34	Immerſio primi, tubo Catad. 5. pedum.
		58	40	Nondum adhuc certa, tubo 23. pedum, Ioue non ſatis alto.
24	10	17	13	Immerſio ſecundi, tubo 23. pedum.
		17	41	eadem, tubo Camp. 15. pedum.
		17	43	- - tubo Catad. 5. pedum.
31	13	6	33	Immerſio ſecundi, tubo Camp. 15 pedum.
		6	51	- - tubo reflectente 5. pedum.
		7	11	- - tubo Catad. 7. pedum.
Sept. 2.	13	50	44	Immerſio primi, tubo 15. pedum.
		51	0	- - tubo Newtoniano 5. pedum.
7	15	46	7	Immerſio primi, tubo Camp. 15. pedum

1738. n. ſt.	Tempus verum. h.	′	″	
		46	18	eadem, tubo 23. pedum.
		46	37	- - tubo Catad. 5. pedum coelo ſereniſſimo.
	18 7	44	55	Immerſio ſecundi, tubo Camp. 15 pedum.
		45	2[illegible]	- - tubo Catad. 5. pedum. Ioue ion ſatis alto.
	12	12	23	Immerſio primi, tubo Camp. 15. pedum.
		12	43	- - tubo 23. pedum.
		12	51	- - tubo Newtoniano 5. pedum.
	25 10	26	49	Immerſio ſecundi, tubo Camp. 15. pedum.
		27	11	eadem tubo Catad. 5. pedum: coelo ſudo.
	14	9	23	Immerſio primi, tubo Camp. 15. pedum.
		9	33	- - tubo reflectente 5. pedum.
		9	42	- - tubo Newtoniano 7. pedum. Coelum ſerenum.
	27 8	38	32	Immerſio primi tubo 23. pedum.
		38	43	- - tubo Catad. 5. pedum: coelo ſudo.
Oct.	2.13	7	0	Immerſio ſecundi, tubo 23. pedum.
		7	7	eadem, tubo Newtoniano 5. pedum: Ioue prope Meridianum verſante; coelo ſereno.

Immer-

1738. st. n.	Tempus verum. h. ′ ″	
9	15 47 2	Immerſio ſecundi, tubo Catad. 5. pedum: coelum quidem ſerenum: ſed ventus nimis validus obſtabat quominus longiores tubos admitteremus.
11	12 31 11	Immerſio primi, tubo Newtoniano 5. pedum: dubia vero intra aliquot minuta ſecunda, ob leuem agitationem tubi a vento, quod etiam tuborum aliorum vſum omnino impediuit.
13	6 59 22	Immerſio primi, tubo Catad. 5. pedum: non ita certa ob nimiam ſatellitis vicinitatem ad diſcum Iouis, quae etiam impedimento fuit quominus alii tubi adhibiti fuerint.
Nou. 12	11 18 8	Primus iam apparebat. ab vmbra Iouis liberatus, tubo Catad. 5. pedum. Prima tamen emerſio 8. vel 10. min. ſec. citius accidere potuit: quippe trans nebulam haec obſeruatio peracta fuit.
16	5 12 54	Tertius ſatelles iam ex vmbra Iouis emerſus videbatur, tubis Camp.

15 ped.

1738. n. ſt.	Tempus verum. h. ′ ″	
		15. ped. et Newt. 8. ped. ſed luce adhuc ita debili, vt primam emerſionem vix 8. vel 10. min. ſec. citius accidiſſe crediderim. Nimia anticipatio coeli erga calculum ex tabulis Aſtronomicis in cauſſa fuit, quo minus nos citius ad hanc obſeruationem non accinxerimus.
Dec. 30	5 56 19	Emerſio primi, accurata, tubo Newtoniano 5. pedum. Coelum quidem ſatis ſerenum erat, at ventus aliorum tuborum vſum impediuit.

FINIS.

AMNH LIBRARY
100125002